"MOLTO RUMORE PER NULLA"?

GRANDE LAVORO PER COSTRUIRE UN ENUNCIATO E… RISULTATI APPARENTEMENTE DELUDENTI

Gruppo di ricerca Zeroallazero[1]

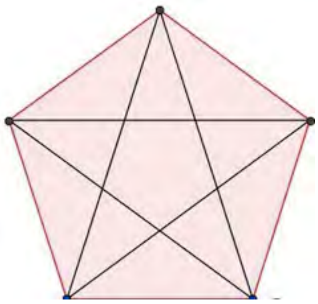
Introduzione

Dall'idea iniziale di un enunciato di un problema, in questo caso del RMT, alla sua messa a punto il cammino è lungo e complesso. Dapprima si focalizza il contenuto matematico al quale si è interessati e si comincia a pensare ad un possibile enunciato. Per costruire un opportuno enunciato è necessario però tener conto di due vincoli essenziali: l'assenza di ambiguità del linguaggio utilizzato e la chiarezza di interpretazione. Infatti l'interpretazione di un contesto deve essere il più possibile "universale", non deve cioè dipendere da situazioni particolari né scolastiche né di altro tipo.
La leggibilità da parte degli alunni degli enunciati dei problemi del RMT, senza aiuto esterno, è un altro aspetto prioritario: bisogna tener conto della sintassi, del vocabolario, della complessità delle frasi, della terminologia, in funzione dell'età.
Bisogna porre attenzione anche alla presentazione dei dati: ci si deve chiedere se emergono chiaramente durante la lettura e se tutti sono necessari o no.
Non meno importante è la modalità di formulazione delle domande o, in generale delle consegne, sia per la comprensione da parte di coloro che sono chiamati a risolvere il problema, sia per la successiva attribuzione dei punteggi strettamente collegata alle consegne stesse.
In quest'articolo viene tracciata "la storia" di un enunciato comprensiva della successiva evoluzione della relativa analisi a priori, per concludersi con le osservazioni scaturite dalla imprescindibile analisi a posteriori degli elaborati dei gruppi di allievi.

1. La "storia" di un enunciato

1.1. L'idea

Gli aspetti matematici insiti nel famoso "pentagono regolare dei pitagorici" con le relazioni fra lati, diagonali e angoli, sembrano essere "alla portata" degli allievi del biennio di scuola secondaria superiore (categorie 9 e 10 nell'ambito del RMT), ma forse anche per allievi dell'ultimo anno di scuola secondaria di primo grado (categoria 8).

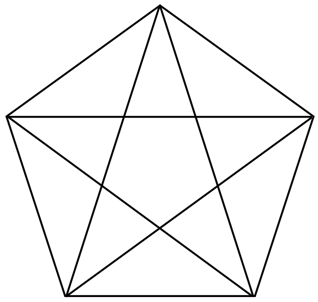


Il contenuto matematico che si era immaginato riguarda la ricerca delle misure degli angoli dei triangoli che possono essere individuati nella figura.
In effetti, nell'ambito del RMT erano già stati proposti problemi relativi al pentagono regolare, ma con l'attenzione posta "solo" sulla ricerca del numero di triangoli individuabili nella figura, come ad esempio nel problema seguente (21° RMT, prima prova):

[1] Maria Felicia Andriani, Clara Bisso, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

Triangoli sì, ma quanti? (per le categorie 6, 7 e 8)[2]

Ecco un pentagono regolare con tutte le diagonali



Alice dice: *In questo pentagono vedo 10 triangoli.*

Bianca le risponde: *Io, ne vedo molti di più!*

Quanti triangoli si possono vedere in tutto in questa figura?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Come si vede, si tratta di un problema incentrato sulla visualizzazione e individuazione di triangoli e il loro conteggio.
I risultati di questo problema non sono stati soddisfacenti (individuati pochi triangoli, ma soprattutto difficoltà di evidenziare chiaramente i triangoli individuati, indispensabile per un corretto conteggio) a livello di categoria 6, ma anche, in una certa misura, a livello di categoria 7.
Sembra dunque ragionevole proporre il nuovo problema, più impegnativo, a partire eventualmente dalla categoria 8 e non prima.

1.2. Tentativo di costruzione di un enunciato

A partire dalla figura precedente e tenendo conto del contenuto matematico immaginato, è stato fatto un primo tentativo di enunciato del problema da proporre eventualmente alle categorie 8, 9, 10.
Questa prima bozza di enunciato è focalizzata essenzialmente su questioni angolari e si reputa necessario ricordare agli allievi quanto valga la misura della somma degli angoli di un pentagono.

Il logo pitagorico (prima bozza)

Angela, Bruno e Carla preparano il logo per la nuova scuola pitagorica

Ad Angela, questo logo piace molto. Si ricorda che la somma degli angoli di un pentagono misura 540 gradi e dice:
- *in questo pentagono regolare le sue diagonali individuano angoli con tre diverse misure*

Bruno dice, *no ce ne sono solo due diversi*

Carla non è d'accordo con nessuno dei due e dice: *vi sbagliate, ce ne sono quattro.*

Quanti angoli con misure diverse ci sono nel pentagono regolare, secondo voi?

Trovate le misure di tali angoli e giustificate le vostre risposte.

1.3. Evoluzione dell'enunciato

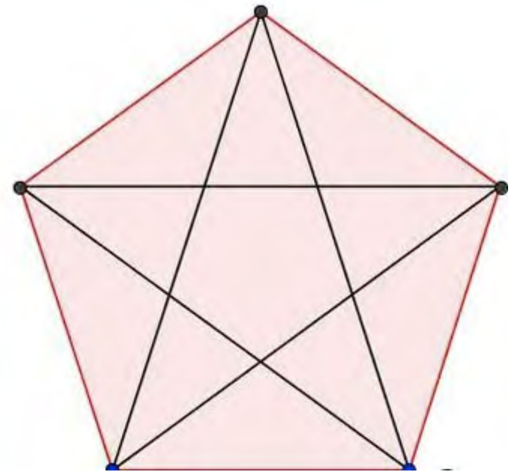
Benché l'impostazione dell'enunciato sia tutto incentrato su questioni angolari, i primi passi che gli allievi dovranno compiere per riuscire a rispondere alle consegne sono legati ai triangoli individuati dalle diagonali del

[2] Si veda Banca di Problemi il cui sito ha un link a partire dal sito www.armtint.org

pentagono (come peraltro richiesto dall’enunciato del problema del 21° RMT più sopra riportato). Sono evidenti 1 10 triangoli isosceli e il pentagono interno, (cioè la partizione della figura in 11 parti “elementari”) sono evidenti; poi gli allievi dovranno contare i triangoli costituiti da due triangoli: due per ogni lato, per un totale di 10; poi gli allievi dovranno contare i triangoli composti da due triangoli: due su ogni lato del pentagono, per un totale di 10; poi i 5 triangoli formati da tre triangoli (uno per ogni vertice del pentagono); poi i 5 triangoli interni composti dal pentagono interno e di due triangoli interni piccoli e infine i 5 triangoli composti dal pentagono interno e da 4 altri triangoli. Si sono individuati così 35 triangoli. La questione specificamente angolare dovrà essere affrontata solo in un secondo tempo.
Si reputa pertanto che sia più opportuno mettere a punto un nuovo enunciato che tenga conto più esplicitamente dei triangoli che si possono visualizzare nella figura proposta.

1.4. Il logo pitagorico (seconda bozza)

Angela, Silvano e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica



Mentre lo ammirano soddisfatti, Angela esclama: *vedo tantissimi triangoli!*
E’ vero, dicono gli altri due. *Vediamo quante famiglie di triangoli ci sono.*

Trovate anche voi quanti triangoli ci sono nel pentagono regolare e di quante famiglie diverse.

Per ciascuna famiglia indicate le misure degli angoli.

Giustificate le vostre risposte.

In questo caso il riferimento esplicito ai triangoli è ben presente, ma sorgono dei dubbi sull’espressione “famiglie di triangoli” che, in effetti, non sembra essere “rigorosa”.

Che cosa si può intendere con “famiglie di triangoli”? Può essere interpretata dal punto di vista delle grandezze, delle isometrie, delle similitudini, della loro posizione nel pentagono, ...

Come superare questa ambiguità di linguaggio?

Dal linguaggio improprio e ambiguo di “famiglia di triangoli” diventa necessario passare al linguaggio matematico e parlare di “triangoli simili” o di “famiglia di triangoli simili”.

Una criticità che permane ancora in questa seconda bozza dell’enunciato viene rilevata nelle richieste. Nei “criteri per l’elaborazione dei problemi” è sottolineato il fatto che sia molto difficile attribuire i punteggi quando vi siano diverse domande, soprattutto laddove siano fra loro dipendenti.

Nel caso di questo problema possiamo già pensare che ci sarà circa ¼ delle risposte “35” alla richiesta del numero di triangoli e una diversità di altre risposte fra le quali 15, 20 o 25 (secondo i risultati del problema *Triangoli, sì ma quanti?* citato in precedenza). Per ognuna di queste risposte alla prima consegna, ci saranno svariati tipi di risposte alla seconda: due famiglie, tre famiglie, ecc. La seconda consegna che riguarda le misure degli angoli apporterà anch’essa risposte diversificate.

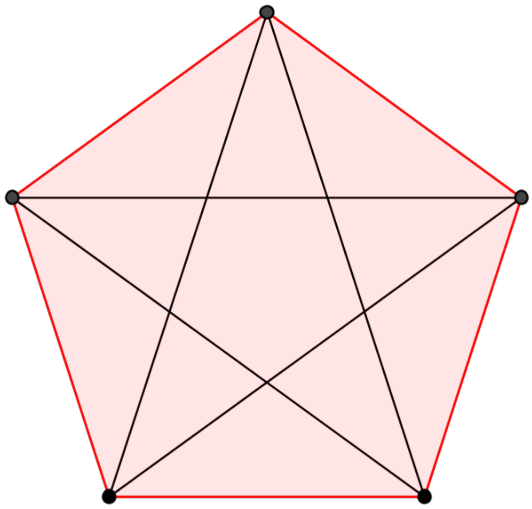
Anche se si contasse “giusto o sbagliato” a ciascuna di queste tre risposte, si arriverebbe a otto tipi di risposte, da cui la grande difficoltà di attribuire i punteggi da 0 a 4.

Questa analisi porta a concludere che è necessario rinunciare almeno a una delle domande, oppure a integrala nella richiesta di spiegazioni.

Tenendo conto di tutti questi aspetti critici si predispone un’ulteriore bozza dell’enunciato dove, peraltro, sembra “più prudente” ricordare agli allievi quando due triangoli sono simili.

1.5. Il logo pitagorico (terza bozza)

Angela, Silvano e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:



Mentre lo ammirano soddisfatti, Angela esclama: *vedo tantissimi triangoli!*
È vero, dicono gli altri due, *vediamo quante famiglie di triangoli simili ci sono.*
(Due triangoli sono simili se i tre angoli dell'uno hanno rispettivamente le stesse misure di quelli dell'altro).

Trovate anche voi quante famiglie di triangoli simili ci sono in questa figura.

Giustificate la vostra risposta.

2. L'analisi a priori, ovvero, che cosa propone l'adulto

2.1. Il compito matematico

Il primo paragrafo dell'analisi a priori riguarda il contenuto matematico e a questo proposito diventa necessario stabilire quali fra i seguenti aspetti si reputino importanti: il conteggio dei triangoli, l'identificazione dei triangoli simili, le misure degli angoli.

Tenendo anche conto dell'ultima formulazione delle consegne dell'enunciato si rinuncia al conteggio dei triangoli, sapendo bene che ci saranno pochi conteggi completi e si concentra l'attenzione sul riconoscimento dei triangoli simili che richiede anche le misure degli angoli.

Il "Compito matematico" diventa quindi "Identificare i triangoli formati dalle diagonali e dai lati di un pentagono regolare poi classificarli in famiglie di triangoli simili."

2.2. Il compito dell'allievo

A partire dall'enunciato e dal compito matematico più sopra definito, si elaborano, inevitabilmente dal punto di vista di adulti, quelle che potrebbero essere le procedure degli allievi che, nella rubrica "Analisi a priori" dei problemi del RMT, va sotto il nome di "Compito dell'allievo".

Prima bozza del compito dell'allievo

Quella che segue è una prima lista "ragionata" delle tappe che potrebbero portare alla risoluzione del problema, all'interno della quale, in corsivo, si trovano anche osservazioni e "dubbi" degli estensori:

- Osservare la figura e "vedervi" il pentagono esterno, le diagonali (stella a cinque punte) e la suddivisione del pentagono in 11 parti elementari: un pentagono interno (*p*) e due tipi di parti elementari, cioè 5 triangoli (*a*) con angoli acuti formati dalle "punte della stella" e 5 triangoli (*o*) con un angolo ottuso di cui un lato coincide con un lato del pentagono esterno.
- Constatare che alcune delle 11 parti possono essere assemblate per formare altri triangoli oltre ai due tipi elementari *a* e *o*. *(Si noti che questo è uno degli ostacoli del problema: passare da ciò che si vede a ciò che si potrebbe vedere)*:

  un terzo tipo composto da due triangoli adiacenti (*a* e *o*), un quarto tipo composto da tre triangoli adiacenti (*o*, *a*, *o*) aventi un vertice comune con un vertice del pentagono esterno,

un quinto tipo composto dal pentagono centrale e da due triangoli (*a*, *p*, *a*), “opposti” ai triangoli del tipo precedente rispetto ad una diagonale (i triangoli di questo quinto tipo si rileveranno uguali a quelli del terzo tipo)

un sesto tipo composto da cinque parti elementari (*o*, *a*, *a*, *p*, *a*).

- Determinare gli angoli “elementari” presenti nella figura totale, constatare che alcuni sono uguali e che ci sono solo angoli di 108, 72 e 36 gradi (è la parte più complessa del problema, che fa appello a tutte le conoscenze sugli angoli di un triangolo, “addizione” e “sottrazione”, angoli opposti, alterni interni, …)

  Per esempio, se si vede che il pentagono può essere scomposto in tre triangoli dove la somma degli angoli è uguale a quella degli angoli del pentagono, se ne deduce che la somma dei angoli è di 540 gradi e che per ragioni di simmetria, uno degli angoli è di 108 gradi, poi si possono trovare due angoli di 36 gradi, poi calcolare l’angolo di una “punta della stella” che misura anch’esso 36 gradi, …

Da un punto di vista dinamico è possibile seguire il percorso dei cinque lati della stella: si parte da un vertice seguendo una diagonale, arrivati al vertice successivo si ruota di un angolo giro “meno” l’angolo della punta (cioè si gira intorno alla punta), e si ripete cinque volte questo spostamento e questa rotazione per ritrovarsi nella posizione di partenza, dopo 5 mezzi giri (equivalenti a un mezzo giro o 180 gradi) meno cinque angoli della punta, dopo una divisione per 5, si trova la misura di un angolo della punta 180 : 5 = 36.

Con il confronto per esempio di un triangolo del quarto tipo e di un triangolo del sesto tipo dove α e ß sono le misure rispettive dell’angolo minore di questi triangoli, si ottengono le equazioni $4\alpha + \beta = 180 = 2\alpha + 3\beta$ da cui si deduce $\alpha = \beta$ poi $5\alpha = 5\beta = 180$ e infine $\alpha = \beta = 36$,

(Ci si chiede se sia necessario descrivere queste procedure. Se si indica nell’enunciato che la somma degli angoli di un pentagono è di 540 gradi, si orientano gli allievi verso una determinata procedura e il problema diventa meno ricco?)

Oppure fare ricorso a misure (approssimative) degli angoli, prese direttamente sulla figura e adattarle e fare una verifica per convincersi che le misure dei tre angoli sono 108, 72 e 36 gradi.

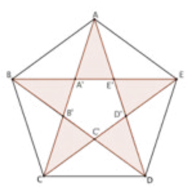
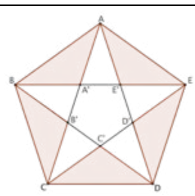
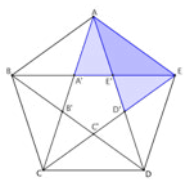
- Constatare che tutti i triangoli hanno due angoli uguali (triangoli isosceli) e che ci sono solo due famiglie di triangoli simili: quella dei triangoli con gli angoli acuti: 36, 72 e 72 gradi e i triangoli con un angolo ottuso: 36, 36 e 108 gradi.

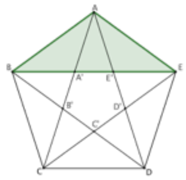
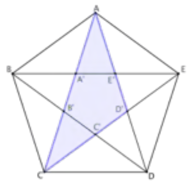
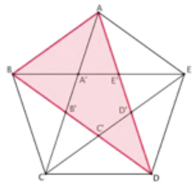
Tenuto conto dell’importanza della presentazione del “Compito dell’allievo”, sia per la definizione dei criteri per l’attribuzione dei punteggi, che per il ruolo che giocherà nel corso della correzione degli elaborati, prende corpo la necessità di presentare anche graficamente le diverse tipologie di triangoli.

Si elabora dunque la

Seconda bozza del compito dell’allievo:

- Capire che per trovare le famiglie di triangoli simili è necessario identificare i numerosi triangoli formati dalle diagonali del pentagono e rendersi conto della necessità di trovare un criterio per l’identificazione di tali triangoli. Ad esempio notare che ci sono triangoli “semplici” e altri formati da più triangoli. Si possono in tal modo contare:

10 triangoli semplici (i 5 che formano “le punte della stella” formata dalle diagonali più i 5 con la base su uno dei lati del pentagono) tipi: 1 e 2	 
10 triangoli composti da due triangoli: ve ne sono 2 per ogni lato tipo 3	

5 triangoli composti da 3 triangoli: uno per ogni vertice tipo 4	
5 triangoli composti da 2 triangoli e il pentagono interno tipo 5	
5 triangoli composti da quattro triangoli e il pentagono interno tipo 6	

- A questo punto, per trovare il numero di famiglie di triangoli simili, è necessario passare alla ricerca delle misure degli angoli dei triangoli. Ci sono numerose maniere di trovare tali misure.
- Per esempio, nel trovare dapprima che gli angoli interni del pentagono misurano 108° e questo lo si può trovare nel vedere che il pentagono può scomporsi in tre triangoli la cui somma degli angoli è quella del pentagono; dedurne allora che la somma dei suoi angoli è 540° e che per delle ragioni di simmetria, uno dei suoi angoli è di 108°. Considerando poi uno dei triangoli isosceli aventi come lati uguali due lati del pentagono e come base una diagonale per esempio ABE, si trovano facilmente le ampiezze degli angoli alla base: (180 - 108) : 2 = 36; Dunque i tre angoli consecutivi di vertice A, BAC, CAD, DAE misurano rispettivamente 36°, (108 – 36 × 2) = 36, 36°. Ciò vale per tutte le terne di angoli consecutivi in ogni vertice del pentagono. Si possono a questo punto individuare le ampiezze di tutti gli angoli, per ogni gruppo di triangoli nella tabella. Per esempio il triangolo AEE' ha due angoli da 36° nei vertici A ed E; (180°-36°·2)=108° nel vertice E'. Il triangolo AA'E' ha l'angolo in A di 36°; l'angolo in E' è supplementare all'angolo AE'E, quindi misura 72°; così pure per l'angolo in A', e così via.

Oppure $\alpha = ß$

- nel confrontare, per esempio, un triangolo di tipo 4 e uno di tipo 6 dove α e ß sono le misure rispettive dell'angolo minore di questi triangoli, si ottengono le equazioni $4\ \alpha + ß = 180$ e $2\ \alpha + 3\ ß = 180$ dalle quali si deduce $\alpha = ß$ poi $5\ \alpha = 5\ ß = 180$ e infine $\alpha = ß = 36$. Si trovano gli angoli che misurano 72°, e 108°.
- Infine, visto che tutti i triangoli che si individuano nella figura hanno angoli alla base congruenti, dedurre che si tratta di triangoli isosceli di due diverse famiglie:
    - triangoli con angoli alla base di 36° e angolo al vertice di 108°;
    - triangoli con angoli al vertice di 36° e angoli alla base di 72°.

In effetti, questa presentazione appare più gestibile per l'analisi degli elaborati e la necessaria attribuzione dei punteggi che viene pertanto redatta nel modo seguente:

4 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con descrizione completa che permette di giustificare la risposta: calcolo di tutti gli angoli e ripartizione di tutti i tipi di triangoli in due famiglie: 36, 72, 72 per i tre tipi di triangoli acuti e 36, 36, 108 per i due (o tre) tipi di angoli ottusi

3 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con descrizione incompleta: per esempio, i cinque o sei tipi di triangoli non sono stati identificati, il dettaglio dei calcoli degli angoli non è menzionato

2 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con solamente un disegno o una descrizione di un rappresentante per famiglia

1 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) senza alcuna spiegazione

oppure risposta errata (una famiglia o tre famiglie) con menzione degli angoli di almeno una famiglia

oppure risposta errata dovuta a calcoli o misure imprecise degli angoli

0 Incomprensione del problema

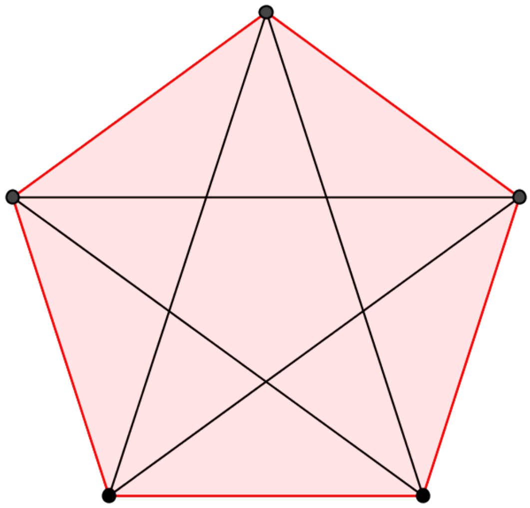
3. La storia della costruzione di questo problema, con il suo enunciato e la sua analisi a priori, … non è ancora finita

Come per ogni problema del RMT, il gruppo di lavoro, in questo caso il gruppo Zeroallazero, che lo ha progettato nelle sue varie componenti, enunciato e analisi a priori, lo “consegna” al “Gruppo di pilotaggio” che è preposto ad una prima analisi e alla suddivisione dei problemi ricevuti nelle tre prove di ciascuna edizione della gara. Dopo una fase di osservazione da parte delle diverse sezioni dell’associazione del RMT, si è arrivati alla versione definitiva, che ha visto diverse modifiche: le categorie interessate sono solo la 9 e la 10, in quanto si è reputato che il problema fosse troppo difficile per la categoria 8; nell’enunciato è stata aggiunta una precisazione alla frase tra parentesi “per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili” come eventuale supporto per gli allievi; la parola “famiglia” è stata sostituita con la parola “tipo” che ha un significato più neutro.

Problema “Il logo pitagorico” – Versione assegnata al RMT ed. 25, prima prova (25.I.19)

19. IL LOGO PITAGORICO (Cat. 9, 10)

Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:



Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
È vero, dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell’uno sono rispettivamente uguali a quelli dell’altro; per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).

Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.

Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.

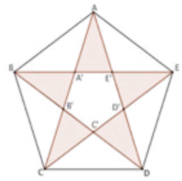
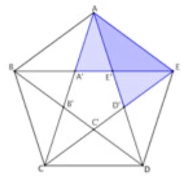
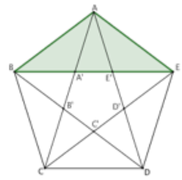
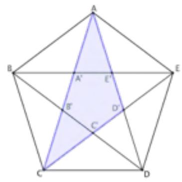
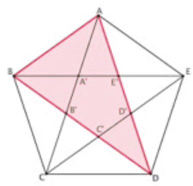
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

- Identificare i triangoli formati dalle diagonali e dai lati di un pentagono regolare poi classificarli in famiglie di triangoli simili.

Analisi del compito

- Capire che per trovare le famiglie di triangoli simili è necessario identificare i numerosi triangoli formati dalle diagonali del pentagono e rendersi conto della necessità di trovare un criterio per l’identificazione di tali triangoli. Ad esempio notare che ci sono triangoli “semplici” e altri formati da più triangoli. Si possono in tal modo contare:

10 triangoli semplici (i cinque che formano “le punte della stella” formata dalle diagonali e i cinque con la base su uno dei lati del pentagono) tipi: 1 e 2	
10 triangoli composti da due triangoli: ve ne sono due per ogni lato tipo 3	
5 triangoli composti da tre triangoli: uno per ogni vertice tipo 4	
5 triangoli composti da due triangoli e il pentagono interno tipo 5	
5 triangoli composti da quattro triangoli e il pentagono interno tipo 6	

- A questo punto, per trovare il numero di famiglie di triangoli simili, è necessario passare alla ricerca delle misure degli angoli dei triangoli. Ci sono numerosi modi di trovare tali misure.

  Per esempio, se non è nota la misura della somma degli angoli interni di un pentagono, si può osservare che il pentagono si può scomporre in tre triangoli e che quindi la misura della somma degli angoli interni al pentagono è $180 \times 3 = 540$. Poiché il pentagono è regolare la misura di ogni suo angolo è $108 = 540 : 5$. Considerando poi uno dei triangoli isosceli (di tipo 4) aventi come lati uguali due lati del pentagono e come base una diagonale, si trovano facilmente le ampiezze degli angoli adiacenti alla base: $(180° - 108°):2=36°$; dunque i tre angoli consecutivi di vertice A: BAC e DAE, misurano entrambi 36°, e CAD, l'angolo della “punta” della stella, misura $(108° - 36° \times 2)=36°$. Si possono così determinare tutti gli angoli della figura. Per esempio, i triangoli di tipo 2, 4 e 5 hanno due angoli di 36° e un angolo di 108°. I triangoli di tipo 1, 2 e 6 hanno un angolo di 36° e due angoli di 72°.

Oppure:

- confrontare, per esempio, un triangolo di tipo 4 e uno di tipo 6, indicando con o la misura dell’angolo di minor ampiezza del triangolo di tipo 4 e con a quella di minore ampiezza di uno di tipo 6, si ottengono le equazioni $4o + a = 180°$ e $2o + 3a = 180°$ dalle quali si deduce $o = a$ e $5o = 5a = 180°$ e infine $o = a = 36°$. Si trovano poi le misure dell’ampiezza degli altri due angoli: 72°, ecc.
- Infine, visto che tutti i triangoli che si individuano nella figura hanno angoli alla base congruenti, dedurre che si tratta di triangoli isosceli di due diverse famiglie:
- triangoli con angoli alla base di 36° e angolo al vertice di 108°;
- triangoli con angoli al vertice di 36° e angoli alla base di 72°.

  (Nel caso si utilizzi un goniometro, lo strumenti non permetterà verosimilmente di dare i valori esatti delle misure degli angoli).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (due tipi di triangoli simili) con descrizione completa che permette di giustificare la risposta: determinazione di tutti gli angoli e ripartizione di tutti i tipi di triangoli in due famiglie: 36, 72, 72 per i tre tipi di triangoli acuti e 36, 36, 108 per i due (o tre) tipi di angoli ottusi

3 Risposta corretta con descrizione incompleta: per esempio, i cinque o sei tipi di triangoli non sono stati identificati, il dettaglio della determinazione degli angoli non è menzionato, la misura degli angoli presa con il goniometro è approssimativa

2 Risposta corretta con solamente un disegno o una descrizione di un rappresentante per famiglia

1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta errata (un tipo o tre tipi) con menzione degli angoli di almeno un tipo
oppure risposta errata dovuta a calcoli o misure imprecise degli angoli

0 Risposta errata: 7 che corrisponde ai tipi di triangoli congruenti fra loro
oppure incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: G0A0

4. Infine la parola agli allievi

Come abbiamo visto, la costruzione del problema è stata lunga e complessa, ma ha riguardato solo gli adulti, a parte il confronto, molto utile peraltro, con i risultati di un problema similare precedente (possiamo dire della stessa famiglia).

Il titolo del presente articolo “Molto rumore per nulla?” (Shakespeare ci perdonerà), vuol mettere l’accento sul passaggio “ideale” dalla preparazione di un problema all’analisi a posteriori degli elaborati degli allievi che, in qualche modo, saranno i giudici del problema stesso.

Laddove ci si fermi ai risultati in termini di punteggi ottenuti dalle classi di categoria 9 e di classi di categoria 10, di nove sezioni, il termine “deludenti” a tali risultati può essere appropriato.

In realtà è solo l’analisi a posteriori degli elaborati degli allievi, con le risoluzioni espresse con il loro linguaggio, che può dare un senso ai risultati “numerici”.

4.1. I risultati

I punteggi di cui alla tabella che segue sono quelli attribuiti alle 342 classi delle nove-sezioni che partecipano al RMT anche per quanto riguarda le categorie 9 e 10:

Categoria	0	1	2	3	4	N. classi	Media
Cat 9	69 (38%)	37 (20%)	24 (13%)	30 (16%)	23 (13%)	183	1.46
Cat 10	71 (45%)	27 (17%)	12 (8%)	31 (19%)	18 (11%)	159	1.36
Totale	140 (41%)	64 (19%)	36 (11%)	61 (18%)	41 (12%)	342	1.41

4.2. Analisi a posteriori

L’analisi a posteriori è stata svolta in particolare sugli elaborati della sezione di Parma a cura di Serafina Foglia e Angela Rizza del nostro gruppo Zeroallazero.

Gli aspetti precipui del compito, nel caso di questo problema, sono tre:

1) capire che nella figura del logo ci sono triangoli “semplici” e triangoli formati rispettivamente da due “pezzi”, da tre “pezzi”, da cinque “pezzi”, per un totale di sei *tipi* di triangoli (due congruenti fra loro);
2) capire che i triangoli diversi si possono raggruppare in due *tipi* di triangoli simili, in cui i triangoli identificati in 1) rientrano, diciamo così, come “*sottotipi*”;
3) indicare le misure degli angoli dei due *tipi* di triangoli trovati.

I punteggi da 4 a 0 sono stati assegnati nel modo sotto descritto:
Chi ha avuto <u>4 punti</u> ha recepito chiaramente tutte e tre le richieste, e le risposte alla 1) sono state espresse in diversi modi: elenco di tutti i triangoli attraverso lettere attribuite ai vertici, uso di colori sulla figura per evidenziare i triangoli, raggruppamento dei sottotipi per triangoli acutangoli e ottusangoli, ritaglio di triangoli per evidenziare i sottotipi.

Esempi di elaborati di categoria 9

Uso di colori sulla figura per evidenziare i triangoli

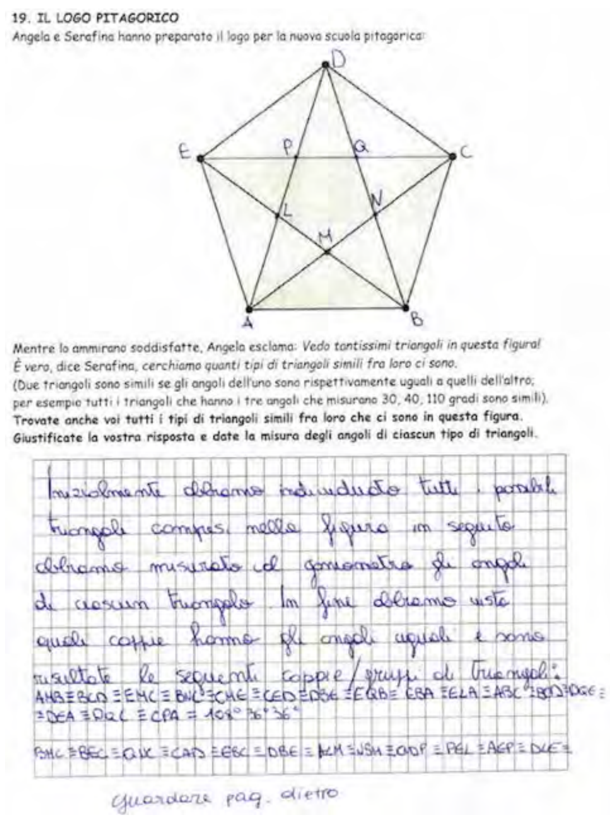


Figura 1

Figura 2

raggruppamento dei sottotipi per triangoli acutangoli e ottusangoli

Innanzitutto ci siamo ricordati che la somma degli angoli interni di un pentagono regolare equivale a 540° e perciò l'ampiezza di ciascun angolo interno sarà di 108° (540°:5=108°).
Poi abbiamo realizzato che c'erano 5 triangoli con dimensioni diverse. Poi ci siamo ricordati che la somma degli angoli interni di un triangolo equivale a 180°.
Infine abbiamo capito che i triangoli 5-2-4 (72° ,30°, 72° sono simili, la stessa cosa vale per i triangoli 1-3 (36°, 108°, 36°)

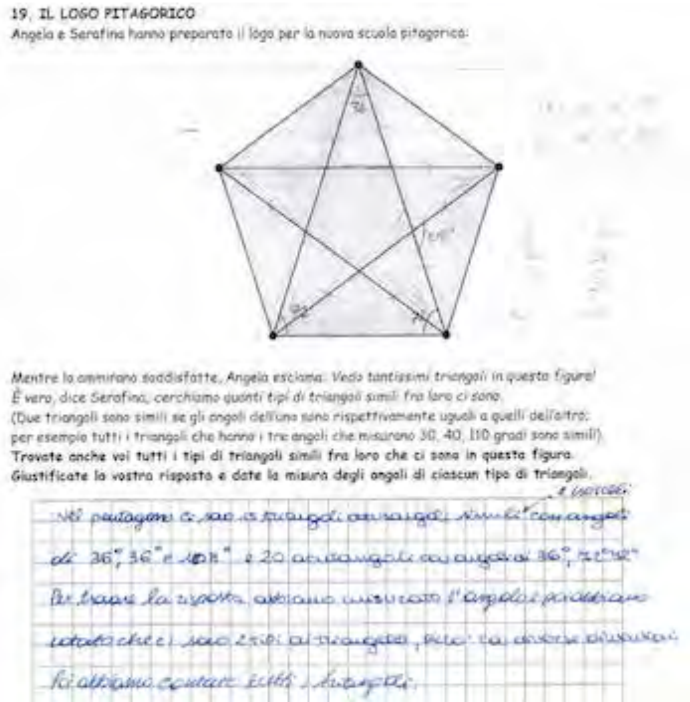


Figura 3

E ancora il seguente elaborato con ritaglio di triangoli per evidenziare i sottotipi:

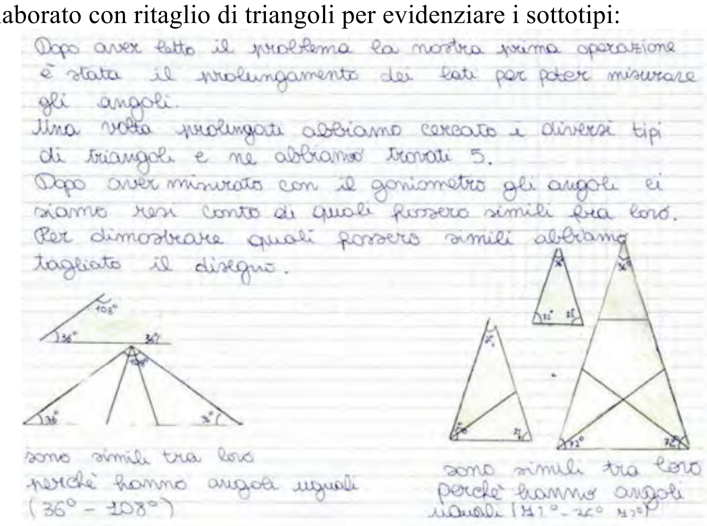
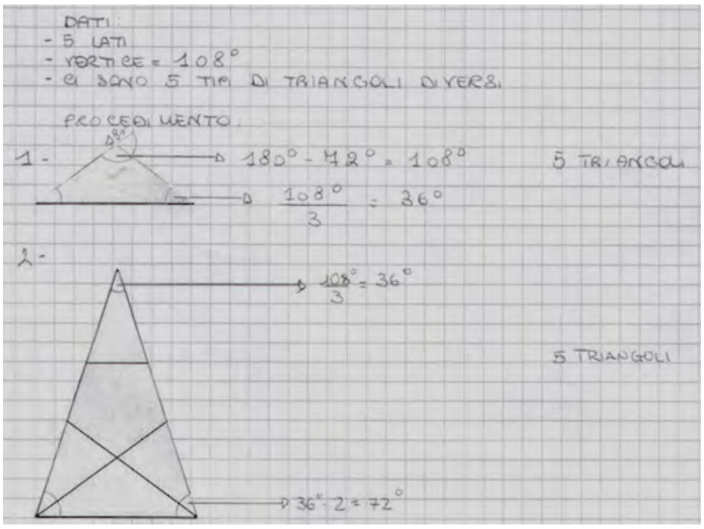


Figura 4

Chi ha avuto <u>3 punti</u> ha invece:

- mancato la risposta alla richiesta 1); vengono citati i due tipi di triangoli simili con le misure corrette degli angoli e sono individuati anche i sottotipi: c'è il riferimento ad un totale di 35 triangoli o a totali parziali, oppure c'è un inizio di elenco dei triangoli con "eccetera…", oppure viene indicato un rappresentante per ogni sottotipo, anche con ritagli. I cosiddetti sottotipi non sono però esplicitati completamente: le risposte alle richieste 2) e 3) hanno superato o inglobato la risposta alla 1).
- commesso errori (anche uno solo) nella misura degli angoli a causa dell'utilizzo del goniometro (circostanza prevista nell'analisi a priori del problema).

Nel secondo caso (cat. 10) c'è effettivamente un errore, nel primo (cat. 10) c'è invece solo uno svolgimento incompleto; abbiamo pensato ad un'ambiguità legata alla parola "tipo" (come si vedrà meglio più avanti). Il terzo esempio è di categoria 9.



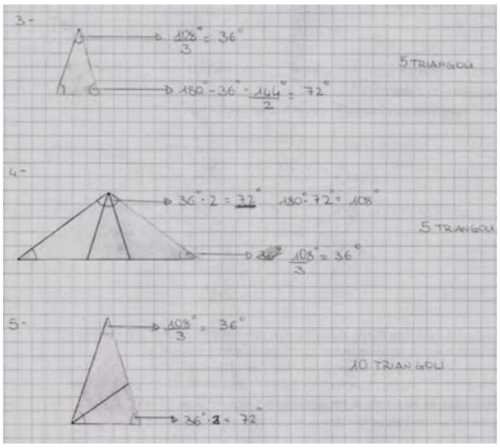
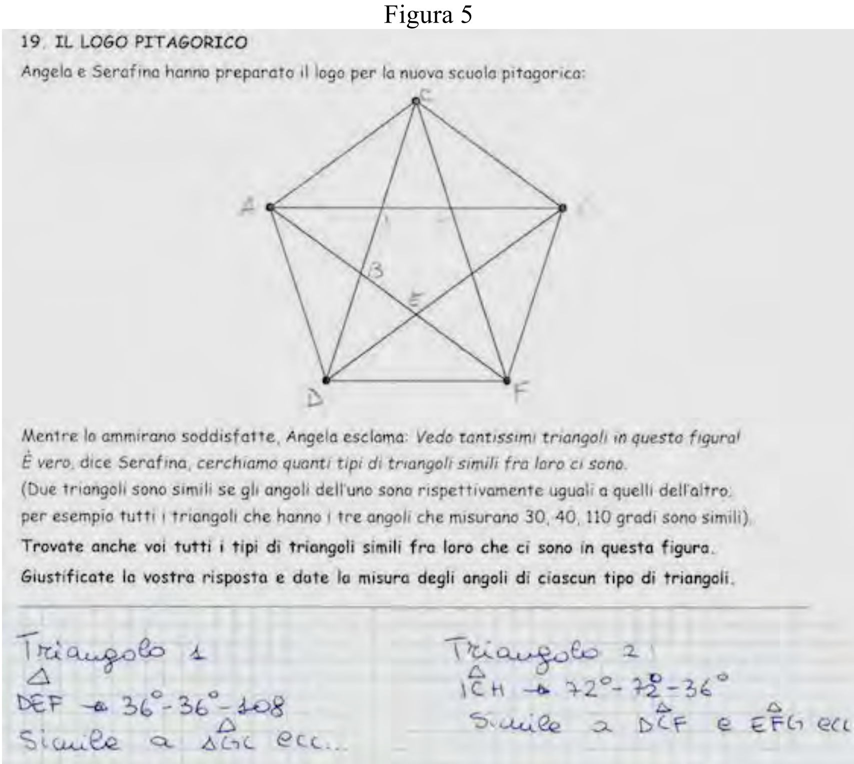


Figura 5



19. IL LOGO PITAGORICO

Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:

Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
È vero, dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro:
per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).
Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.
Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.

Triangolo 1
DEF → 36°-36°-108
Simile a AGC ecc...

Triangolo 2
ICH → 72°-72°-36°
Simile a DCF e EFG ecc

Figura 6

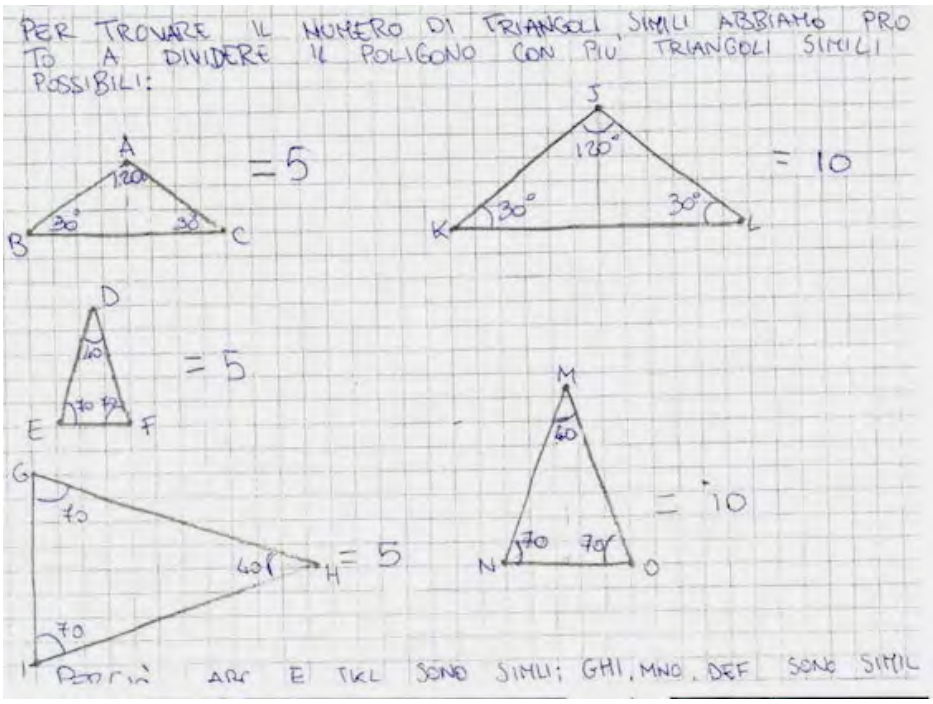
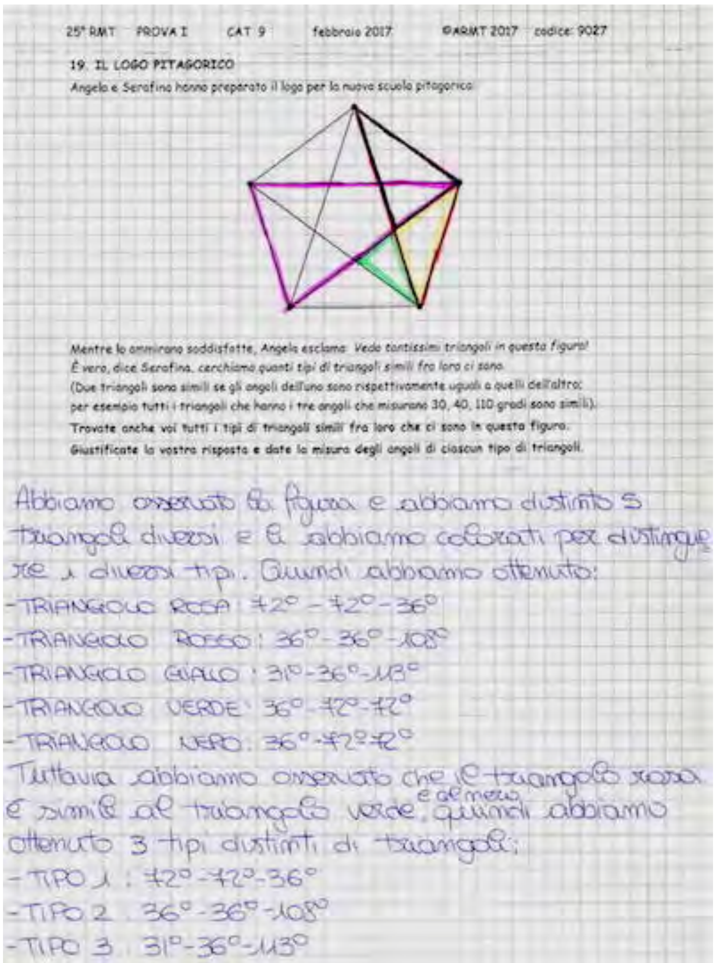


Figura 7

Chi ha avuto 2 punti ha in generale fornito una risposta parziale; in un caso, come il seguente di categoria 9,



25° RMT PROVA I CAT 9 febbraio 2017 ©ARMT 2017 codice: 9027

19. IL LOGO PITAGORICO

Angelo e Serafino hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica.

Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*

È vero, dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*

(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro; per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).

Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.

Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.

Abbiamo osservato la figura e abbiamo distinto 5 triangoli diversi e li abbiamo colorati per distinguere i diversi tipi. Quindi abbiamo ottenuto:
- TRIANGOLO ROSA: 72° - 72° - 36°
- TRIANGOLO ROSSO: 36° - 36° - 108°
- TRIANGOLO GIALLO: 31° - 36° - 113°
- TRIANGOLO VERDE: 36° - 72° - 72°
- TRIANGOLO NERO: 36° - 72° - 72°

Tuttavia abbiamo osservato che il triangolo rosa è simile al triangolo verde e al nero, quindi abbiamo ottenuto 3 tipi distinti di triangoli:
- TIPO 1: 72° - 72° - 36°
- TIPO 2: 36° - 36° - 108°
- TIPO 3: 31° - 36° - 113°

Figura 8

la risposta è sbagliata a causa di un errore nella misura degli angoli: tale eventualità non era stata prevista nell'analisi del compito.

Chi ha avuto 1 punto ha solo iniziato un ragionamento sugli angoli dei diversi triangoli che "vedeva" e non ha portato a termine la classificazione dei triangoli, non rispondendo di fatto alle domande poste dal problema.

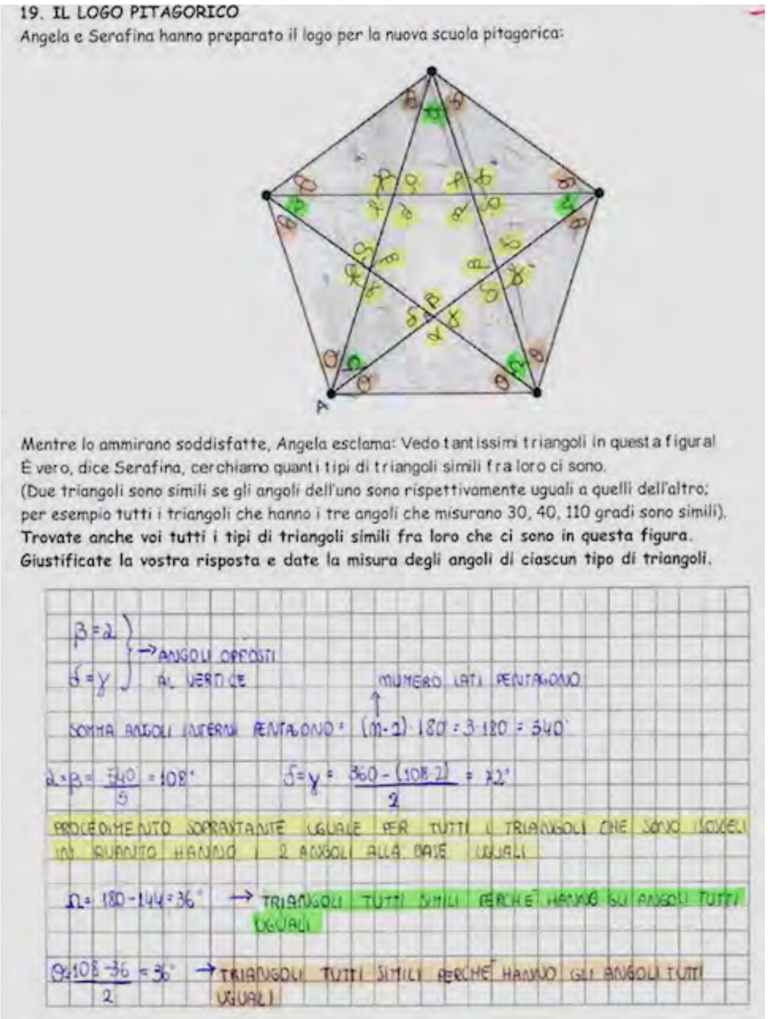


Figura 9

Chi ha avuto 0 punti ha lasciato la risposta in bianco oppure ha tentato di rispondere al problema, evidenziando però:

- una mancata comprensione del concetto di similitudine, spesso confusa con la congruenza
- il riconoscimento solo di triangoli "mono-pezzo", come nel caso dell'elaborato di categoria 9:

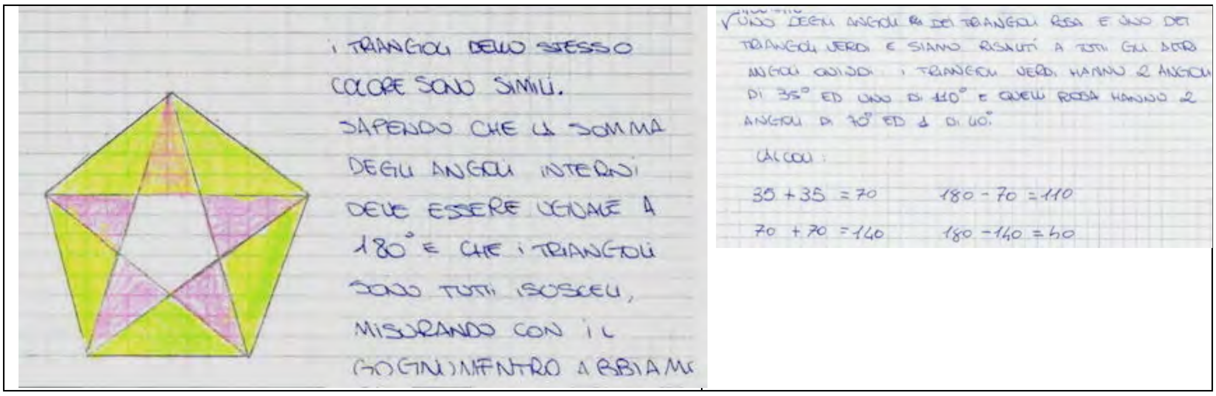


Figura 10

- il ricorso a strumenti di misura che sentivano come necessari ma che non hanno saputo gestire (cat. 9):

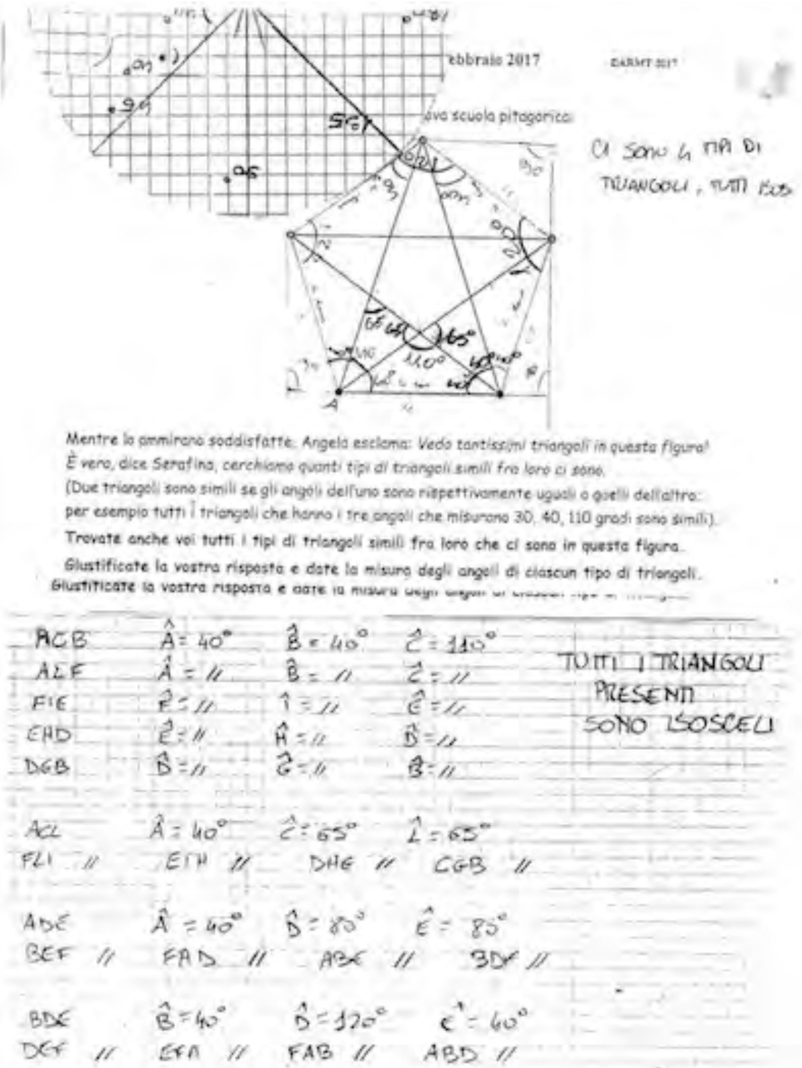


Figura 11

- e infine, solo il conteggio dei vari triangoli (non richiesto) senza la relativa classificazione in tipi.

Alcune osservazioni

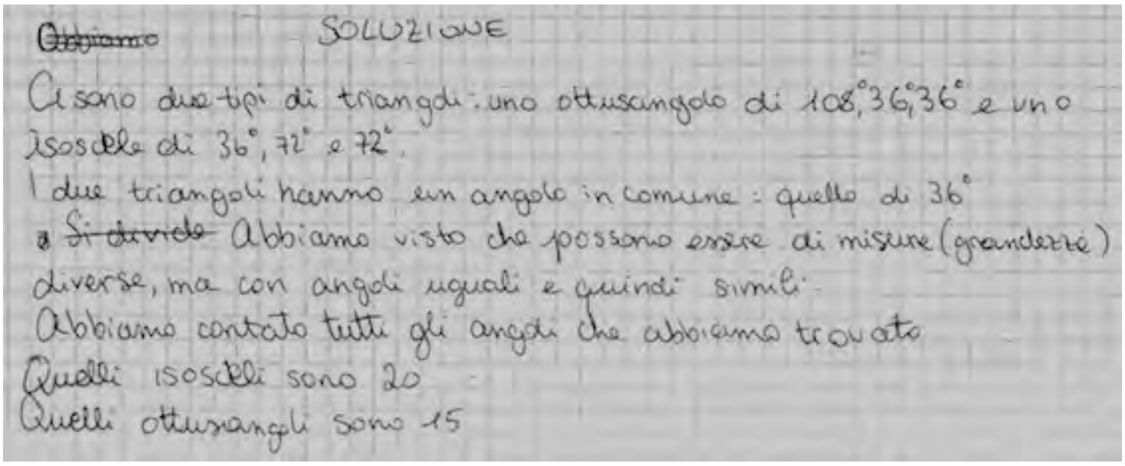
Considerando l’elevato numero di punteggi 0 (16 per la cat. 9 e 17 per la cat. 10, per la sezione di Parma) e la tabella riassuntiva dei punteggi delle 342 classi vista più sopra, il problema si è rivelato piuttosto difficile.

In effetti, altri problemi analoghi assegnati in precedenti edizioni del RMT, avevano avuto un basso tasso di riuscita.

Il testo del problema, più volte rivisto, come riportato, per essere reso più chiaro e comprensibile, resta ancora troppo ricco di spunti per possibili risposte: a fronte di elaborati estremamente sintetici che centrano le risposte, ci sono analisi molto dettagliate che però non arrivano alla conclusione, concentrandosi o disperdendosi in osservazioni non scorrette, ma comunque non pertinenti.

Riprendendo l’analisi iniziale delle tre richieste del problema, l’uso dell’espressione “tipi di triangoli simili” in tre frasi diverse potrebbe aver focalizzato l’attenzione sulla richiesta 2) mettendo in secondo piano la 1), che pure doveva essere stata compresa. In altre parole, una volta capito che i tipi di triangoli simili erano due, e determinate le misure corrette degli angoli, anche attraverso vere e proprie dimostrazioni geometriche, a molti non è parso più necessario distinguere quelli che inizialmente abbiamo chiamato sottotipi.

A tal proposito occorre dire che alcuni elaborati, valutati con punteggi differenti, presentano lievi sfumature nelle risposte, a riprova della difficoltà di attribuire punteggi coerenti con quelli stabiliti, quando il problema presenta più richieste o contiene più domande. D’altro canto, in diversi elaborati, indipendentemente dal punteggio ottenuto, si nota lo sforzo di contare il numero totale di triangoli all’interno dei vari sottotipi o il numero totale complessivo di triangoli inclusi nella figura, numeri effettivamente non richiesti, come nel caso dell'elaborato di categoria 9 seguente:



~~Abbiamo~~ SOLUZIONE

Ci sono due tipi di triangoli: uno ottusangolo di 108°, 36°, 36° e uno isoscele di 36°, 72° e 72°.

I due triangoli hanno un angolo in comune: quello di 36°

e ~~Si divide~~ Abbiamo visto che possono essere di misure (grandezze) diverse, ma con angoli uguali e quindi simili.

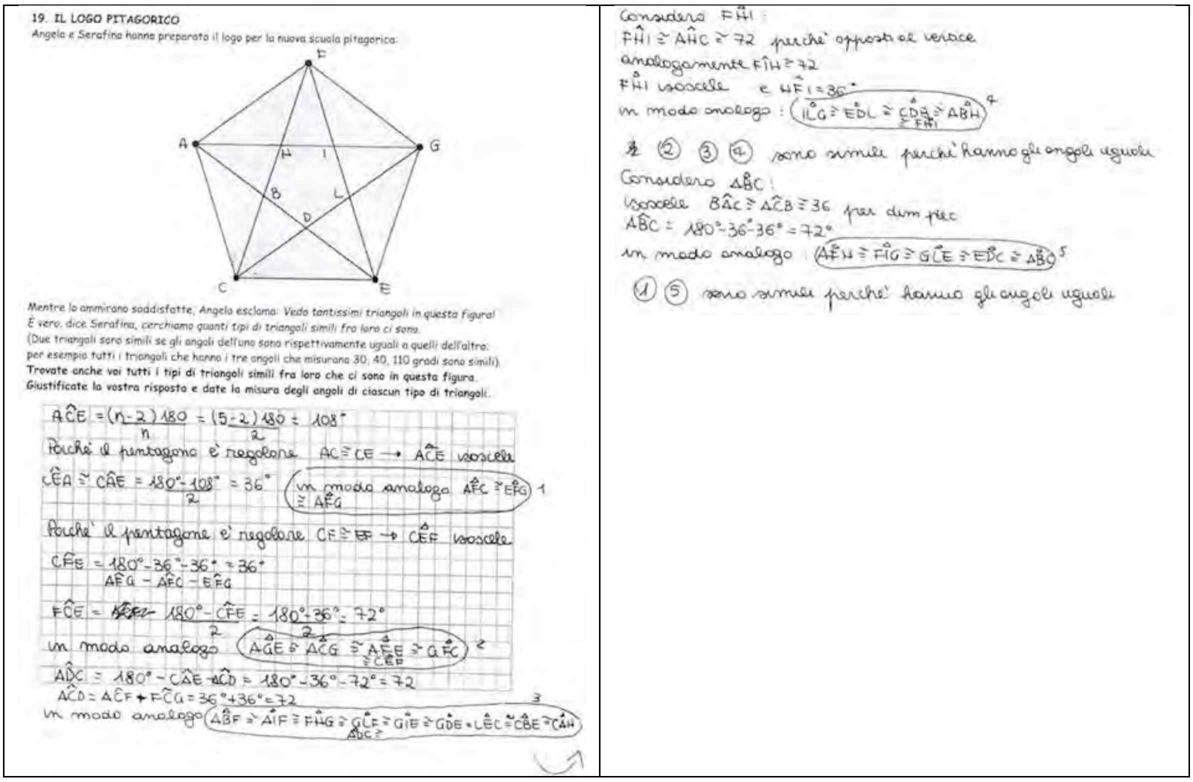
Abbiamo contato tutti gli angoli che abbiamo trovato

Quelli isosceli sono 20

Quelli ottusangoli sono 15

Figura 12

Non si notano grandi differenze tra gli elaborati delle categorie 9 e 10, ma si evidenzia, nel passaggio dalla categoria 9 alla 10, l'abbandono della strategia della misura e del ricorso al goniometro a favore di ragionamenti più astratti e della ricerca di dimostrazioni geometriche come si evidenzia negli elaborati seguenti:



19. IL LOGO PITAGORICO

Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica.

Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: Vedo tantissimi triangoli in questa figura! È vero, dice Serafina, cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.

(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro: per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).

Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura. Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.

$A\hat{C}E = \frac{(n-2)180}{n} = \frac{(5-2)180}{2} = 108°$

Poichè il pentagono è regolare $AC \cong CE \rightarrow A\hat{C}E$ isoscele

$C\hat{E}A \cong C\hat{A}E = \frac{180°-108°}{2} = 36°$ in modo analogo $A\hat{F}C \cong E\hat{F}G \cong A\hat{F}G$ 1

Poichè il pentagono è regolare $CF \cong \cancel{EF} \rightarrow C\hat{E}F$ isoscele

$C\hat{F}E = 180° - 36° - 36° = 36°$
$A\hat{F}G - A\hat{F}C - E\hat{F}G$

$F\hat{C}E = \frac{180° - C\hat{F}E}{2} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$

in modo analogo $A\hat{G}E \cong A\hat{C}G \cong A\hat{F}E \cong G\hat{F}C \cong C\hat{E}F$ 2

$A\hat{D}C = 180° - C\hat{A}E - A\hat{C}D = 180° - 36° - 72° = 72$

$A\hat{C}D = A\hat{C}F + F\hat{C}G = 36° + 36° = 72$

in modo analogo $A\hat{B}F \cong A\hat{I}F \cong F\hat{H}G \cong G\hat{L}F \cong G\hat{I}E \cong G\hat{D}E \cdot L\hat{E}C \cong C\hat{B}E \cong C\hat{A}H \cong A\hat{D}C$ 3

Considero $F\hat{H}I$:

$F\hat{H}I \cong A\hat{H}C \cong 72$ perchè opposti al vertice

analogamente $F\hat{I}H \cong 72$

$F\hat{H}I$ isoscele e $H\hat{F}I = 36°$

in modo analogo: $I\hat{L}G \cong E\hat{D}L \cong C\hat{D}B \cong A\hat{B}H \cong F\hat{H}I$ 4

~~1~~ 2 3 4 sono simili perchè hanno gli angoli uguali

Considero $A\hat{B}C$:

isoscele $B\hat{A}C \cong A\hat{C}B \cong 36$ per dim prec

$A\hat{B}C = 180° - 36° - 36° = 72°$

in modo analogo: $A\hat{F}H \cong F\hat{I}G \cong G\hat{L}E \cong E\hat{D}C \cong A\hat{B}C$ 5

1 5 sono simili perchè hanno gli angoli uguali

Figura 13

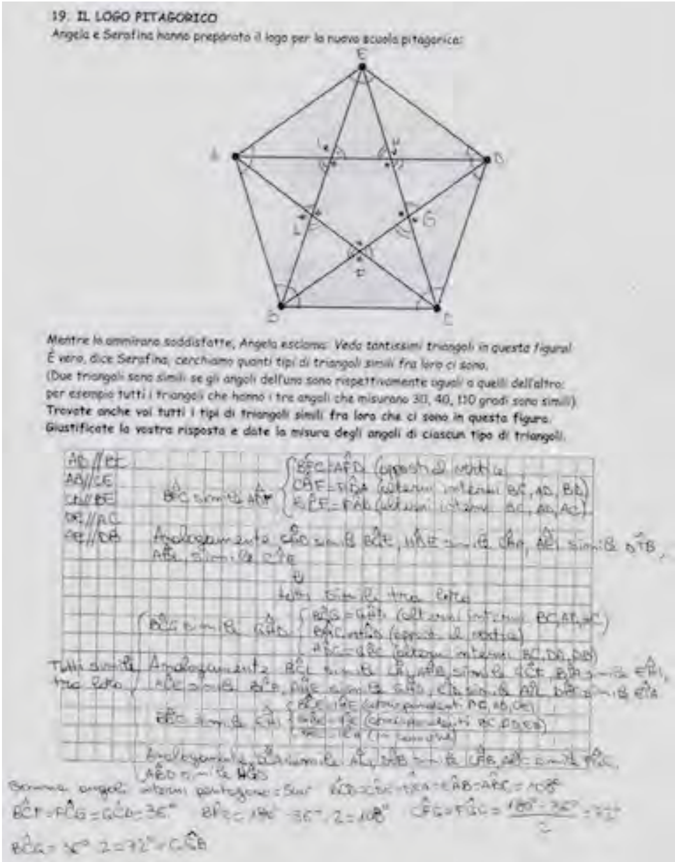


Figura 14

Indicazioni didattiche

Benché i risultati che riguardano problemi del RMT a contenuto geometrico, in particolare per quelli delle categorie più alte, si rivelino nel complesso deludenti, pensiamo che abbia senso continuare a proporli convinti che, al di là dei risultati della gara, possano essere ripresi in classe per attività geometriche che stimolino la mobilizzazione di conoscenze pregresse, talvolta oscurate da una preponderanza di attività essenzialmente di tipo algebrico.

Il problema in oggetto, e altri proposti negli anni nell'ambito del RMT, sono da catalogare come problemi che mettono gli allievi in situazioni di ricerca, problemi cioè che non si risolvono in particolare con l'applicazione diretta di formule o di definizioni in qualche modo meccaniche, ma che necessitano del ricorso a successivi ragionamenti, o ancora problemi che evidenziano le diversità di risultati laddove si ricorra a misurazioni, cosa che porta alla domanda "perché otteniamo risultati diversi?", abituando quindi gli alunni al passaggio da una realtà particolare ad un ambito "generale".

Nasce così, in maniera "spontanea", un conflitto cognitivo che necessita, per il suo superamento, di "sganciarsi" dalle misure per trovare una via comune in qualche modo certificata.

È proprio nel lavoro di classe, l'ambiente nel quale sarà possibile mettere a confronto i diversi modi di risolvere un problema e ciò permetterà di far evolvere incertezze e stereotipi, come ad esempio il riferimento al riconoscimento solo di triangoli che abbiamo indicato come "mono-pezzo" (citato in precedenza some primo esempio di punteggio 0) o come il confondere ancora "congruenza" e "similitudine".

Può inoltre essere interessante dibattere sulla necessità iniziale di trovare un **criterio** per l'identificazione delle famiglie di triangoli simili.

In aspetti di questo tipo si può intravedere **la differenza fra un'attività di tipo nozionistico e un'attività che veda la geometria come "ricerca ragionata".**

Nella seconda parte del titolo di questo articolo si trova scritto "risultati apparentemente deludenti"; pensiamo infatti che i risultati piuttosto deludenti della prova, potrebbero non esserlo più quando il problema in oggetto **diventi protagonista di una ricca attività in classe.**