ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DI APPRENDIMENTO A PARTIRE DA PROBLEMI DELLA BANCA

François Jaquet

Sunto

La presentazione che segue è in qualche maniera una visita guidata della Banca di problemi rivolta a un insegnante che prova a organizzare un percorso di apprendimento per i propri allievi a proposito del rettangolo, della sua area e di tutte le nozioni che ne discendono.
Vi si troverà qualche considerazione introduttiva sulla risoluzione di problemi, una modalità di entrata nella banca, tramite gli “ambiti” e le “famiglie di compiti”, l’esame di qualcuna delle sue schede e le loro diverse rubriche.
Lo scopo della visita è quello di percepire, da un lato, qualche potenzialità dello strumento “Banca di problemi” per l’insegnante che cerca di favorite la costruzione di conoscenze per i suoi allievi e, d’altra parte, la sua complessità.
La visita avrà inizio con la presentazione della banca di problemi, proseguirà con la “navigazione” determinata dall’insegnante che potrà entrare con gli ambiti e le famiglie, poi con l’esame di sette schede. Terminerà con qualche considerazione generale.

1. Introduzione

1.1. Il visitatore

Quando organizza il suo programma all’inizio dell’anno scolastico, quando si rende conto che i suoi allievi non padroneggiano ancora determinate conoscenze, quando scopre un errore frequente o un ostacolo particolare, l’insegnante sceglie un certo percorso di apprendimento – o di recupero – da proporre alla propria classe. Ha a disposizione numerose opzioni: capitoli del libro di testo, programmi di recupero con spiegazioni specifiche, liste di esercizi complementari, …
Laddove metta in dubbio l’efficacia di un percorso convenzionale che va dalla “lezione” agli “esercizi”, eventualmente ripetuti fino alla saturazione, è possibile che l’insegnante vada alla ricerca di altre modalità di apprendimento.
Sul Web, troverà numerosi “metodi” che si dicono efficaci secondo coloro che li propongono, serie di problemi organizzati tema per tema, con le soluzioni; software di apprendimento …
Se però il nostro visitatore non cerca dei metodi su come l’insegnante dovrebbe “insegnare matematica”, ma piuttosto proposte di attività per i suoi allievi, con le fasi dove gli allievi stessi si pongono delle domande, fanno tentativi, scoperte parziali, scambi… che permettono loro di progredire nell’elaborazione e la padronanza progressiva di un sapere, la Banca di problemi del RMT può allora proporgli qualche suggerimento per le sue importanti scelte.

1.2. Il tema della visita: a proposito di “rettangolo”, “area” …

Il visitatore da noi immaginato per questa visita guidata è un insegnante piuttosto particolare (nel seguito lo chiameremo “**I**”) che si pone delle domande, interessato dalla “risoluzione di problemi” – citata abbondantemente nei programmi nazionali di matematica – alla ricerca di attività dove i suoi allievi sono protagonisti della costruzione delle loro conoscenze.
Non è un “matematico”, la sua formazione è quella di insegnante di scuola secondaria che ha diverse classi o quella di un insegnante di scuola primaria.

I: “Rettangolo e area, mi interessa… per un percorso di apprendimento in matematica con una nuova classe di categoria 6 (11-12 anni). È nel programma!!”.
In effetti, in tutti i nostri paesi di Transalpino, la nozione figura nei programmo ufficiali. Eccone qualche esempio:
- *Calcola l'**area** del quadrato e del **rettangolo** (misure intere), determina l'**area** di un parallelogramma, di un **triangolo rettangolo** a partire **dall'area del rettangolo** (misure intere)*[1]
- ***Le aree**: nell’intero ciclo conviene scegliere procedure adatte per confrontare le aree di due superfici. ... Si possono allora costruire e utilizzare le formule per calcolare l’area di un quadrato, di un rettangolo, poi in “sesta” (prima secondaria di I grado), **calcolare l’area di un triangolo rettangolo**, di un triangolo qualunque la cui altezza è nota, di un cerchio.*[2]
- *Poi, “descrivere”, “riprodurre”, “riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse”, confrontare e misurare angoli”, “concetti di parallelismo, perpendicolarità,..”, “riprodurre in scala (p.e. carta a quadretti)”,*

[1] « ATTENTES FONDAMENTALES » en fin du cycle (cat 5 -6) PER (MSN 24)
[2] B.O. 26.11.2015

"determinare il perimetro" ***… Determinare l'area di rettangoli, triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule***[3]**.**

1.3. Qualche riflessione preliminare del visitatore a proposito di "rettangolo", "area" …

I: "Che cosa sanno i miei allievi sull'argomento?"
- Il rettangolo ha un lato più lungo dell'altro, paralleli ai bordi del foglio, della porta, del tavolo, del campo di calcio…?
- è una figura tra le altre: poligono, quadrilatero, parallelogramma, quadrato,
- si parla di lunghezza, larghezza, perimetro, area, poi di parallele, perpendicolari, angolo retto, …
- bisogna fare addizioni, moltiplicazioni, convertire unità di misura (il cm, il cm^2),

I: "E a lungo termine quali sono i concetti in divenire o in costruzione?"
- Isometrie, proprietà delle operazioni (commutatività, modello di moltiplicazione, distributività), equivalenza, proporzionalità, numero razionale, numero irrazionale, numero reale, approssimazione…"

I: "Come affronterò l'argomento quest'anno visto che l'anno scorso i miei allievi ricordavano la formula dell'area del rettangolo ma la padroneggiavano solo nei casi di applicazione diretta e nelle situazioni tradizionali?"
La *Risoluzione di problemi* invocata nei testi ufficiali potrebbe essere la nuova strada?
Proviamo ad andare a vedere nella *Banca di problemi del RMT* di cui ho sentito parlare".

2. L'entrata nella Banca

2.1. Dove trovarla?

Per una prima visita, si può entrare nella banca tramite il sito dell'ARMT: http://www.armtint.org
e con la rubrica Banca di problemi, in basso a destra, dove è sufficiente andare ad Accedi per veder apparire la presentazione:

> Benvenuti. Avete appena passato la soglia della "Banca di problemi del Rally matematico transalpino" e vi aspettate ovviamente di trovare dei problemi e, in effetti, ne troverete più di un migliaio.
>
> Prima di andare oltre forse vi chiedete:
> - Di quale tipo di problemi si tratta?
> - Chi sono i destinatari della banca e come sono organizzati i problemi?
> - Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?
> - Qual è il ruolo dell'insegnante nell'ambito della risoluzione di problemi?
> - Come contribuire?

(Nota per la lettura di questo testo: nell'accedere al sito con i link predisposti più sopra, il lettore vedrà apparire una pagina intera della banca. Il testo di questo articolo ne riproduce solo qualche parte essenziale "in un riquadro").

Chi naviga su Internet e non si pone le domande indicate più sopra, passerà a un altro sito mentre il nostro visitatore vi si soffermerà. Ne avrà almeno per cinque o dieci minuti.
Anche il lettore può interessarsene e vedrà che i cinque paragrafi (e pagine) di questa introduzione situano in maniera chiara e veritiera lo strumento "banca di problemi del RMT": i problemi proposti non sono "esercizi" di applicazione e non ci si interessa solamente alla risposta corretta. Vedrà anche che la responsabilità della procedura di risoluzione è lasciata all'allievo e che il ruolo dell'insegnante non è quello di "insegnare" o di "presentare" la lezione, bensì di stimolare un dibattito tra allievi, che seguirà la risoluzione o i tentativi di risoluzione. Vedrà infine, in maniera sintetica, che:
- La banca di problemi del RMT non offre "modelli già confezionati", ma tutto è "fatto su misura".
- In situazione di risoluzione di problemi bisogna adattarsi al "terreno" degli allievi, il "programma" non è la priorità.
- L'insegnamento tramite la risoluzione di problemi è complesso, delicato e più difficile rispetto a "fare la lezione" o "dare degli esercizi". L'insegnante non ha più il ruolo unico di trasmettitore del sapere, ma quello di regista della costruzione per il tramite degli allievi.

2.2. Navigazione

Dopo l'introduzione, la porta si apre con Accesso alla banca che troviamo in basso nella colonna di sinistra di ciascuna delle pagine precedenti, poi, dopo aver scelto la lingua "Italiano" o "Francese" su Navigare o Naviguer: (lasciando da parte per il momento la rubrica « Demander » o «Domandare») si presentano sei entrate
- Ambiti: i grandi capitoli dei programmi o dei libri di testo
- Famiglie: gli ambiti, suddivisi in famiglie di compiti

[3] Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana 05.02.2013. Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria *Spazio e figure*

- Concetti: una ricerca tramite nozioni, conoscenze, saperi… o anche “parole-chiavi” che chiamiamo attualmente “concetti” in attesa di trovare una denominazione più universale
- Rally: la lista delle prove dal 2° al 27° RMT, utile soprattutto per coloro che hanno partecipato alle edizioni precedenti e desiderano ritrovare rapidamente i problemi di una prova particolare
- Vocabolario: una ricerca secondo i termini dei titoli dei problemi, in ordine alfabetico, utile soprattutto per coloro che si ricordano di certi problemi
- Categorie: una ricerca di problemi secondo le categorie alle quali erano stati attribuiti, da 3 a 10, corrispondenti alle età degli allievi, dagli 8-9 anni ai 15-16 anni.

2.3. Entrata tramite le famiglie

Per il nostro visitatore che è alla ricerca di idee di problemi in funzione dei bisogni dei suoi allievi, è l’entrata per Famiglie che gli consente di procedere con efficacia. Vi trova una lista che si sussegue su due pagine e il suo interesse per il *rettangolo* e *l’area* lo inducono a leggere le famiglie degli ambiti GM e GP, di cui ecco qualche rubrica.
In GM, “Grandezze e misure”, per esempio, si trovano le famiglie LA e RD con alcune delle loro “sotto-famiglie”:

LA – Utilizzare misure di lunghezze e aree
    LA/UA - Gestire unità d’area
    …
RD - Ricercare o utilizzare dimensioni
    RD/AP - Determinare aree e/o perimetri
    RD/CP - Confrontare aree e/o perimetri
    RD/VOL- Determinare aree e/o perimetri e/o volumi
    …

Poi in GP “Geometria piana”, le famiglie CA, IF, QUA e alcune delle loro sotto-famiglie.

CA - Confrontare aree
CA/D - Confrontare aree con il ritaglio
CA/P - Confrontare aree su una quadrettatura
…
IF - Identificare figure
    IF/INV - Fare un inventario
    IF/RC - Riconoscere e costruire figure elementari
QUA-Lavorare su una quadrettatura
    QUA/GQ - Gestire poligoni su carta quadrettata
    …

Nel proseguire la visita, si osserverà che non sono da memorizzare i codici che designano ambiti, famiglia e sotto-famiglie, necessari alla classificazione. Sono le descrizioni succinte dei problemi che appaiono quando “si apre” una famiglia che saranno determinanti per la scelta delle schede.
Per esempio, nella famiglia IF/RC - IF/RC - Riconoscere e costruire figure elementari

…

Il tavolo da spostare **(ral.** 16.F.24 **; cat.** 4-5 **;** 16rmtf_it-24): Su una quadrettatura, determinare i vertici mancanti di rettangoli nei quali alcuni vertici sono dati, a partire da un modello sistemato in una posizione diversa

…

Il quadrato di Lea **(ral.** 17.II.11 **; cat.** 5-7 **;** 17rmtii_it-11): A partire da un puzzle di 10 pezzi disposti in forma di parallelogramma (su una trama di cinque quadrati allineati, ricostruire un rombo, poi un trapezio rettangolo con 8 di quei pezzi e infine un quadrato con i 10 pezzi.

I dieci punti **(ral.** 18.I.08 **; cat.** 5-7 **;** 18rmti_it-8): A partire da dieci punti su una griglia quadrettata, ricerca di gruppi di quattro punti che formano dei quadrilateri aventi le proprietà caratteristiche del rettangolo.

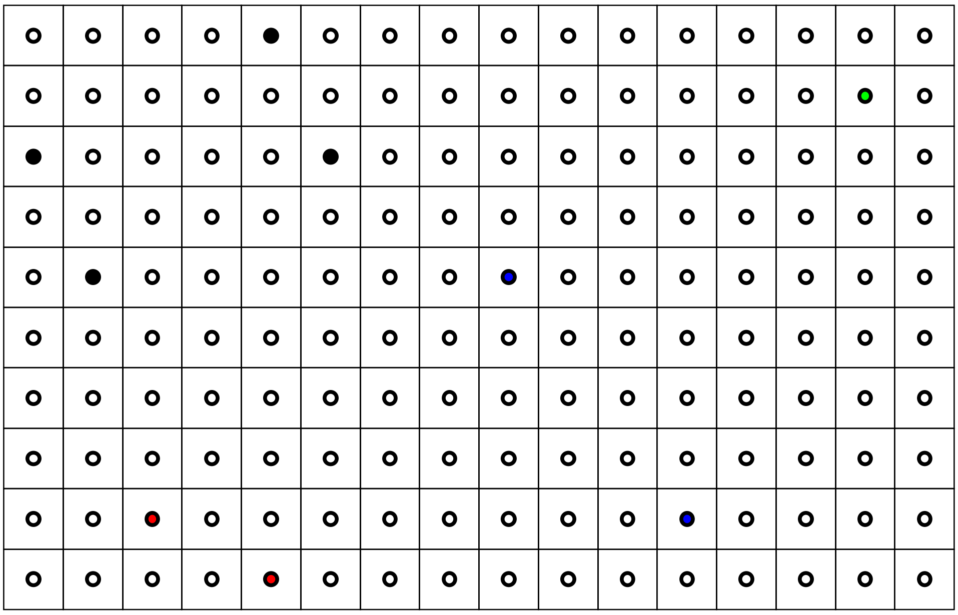
…

3. le schede dei problemi

3.1. Il tavolo da spostare

La visita comincia con la prima delle schede del riquadro riportato più sopra della sotto-famiglia IF/RC Riconoscere e costruire figure elementari che troviamo anche nelle famiglia ANG (Utilizzare angoli e/o misure di angoli e QUA (Lavorare su una quadrettatura. È il suo sunto che ha attirato l’occhio del visitatore:

Il tavolo da spostare (cat. 4, 5, 6)



Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.
Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.
Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).
Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.
Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.
Giulia sposta ancora il tavolo …

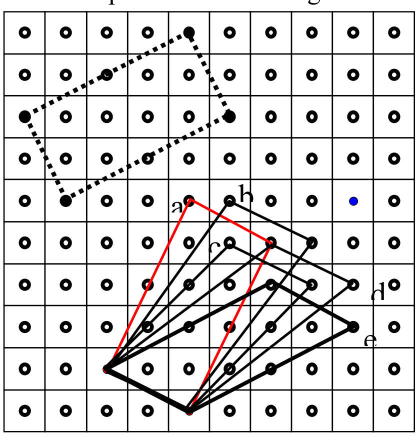
(L'enunciato completo richiede ancora di disegnare il tavolo in due altre posizioni: con due piedi sui cerchietti blu, poi con un piede sul cerchio verde in alto a destra).

Qui di seguito qualche commento del visitatore dopo la lettura dell'enunciato e la presa di visione dei risultati.

I: "C'è molto da leggere e l'impaginazione non è delle migliori ma…
Penso che non ci saranno difficoltà. Concordo con l'analisi a priori.
I miei allievi sanno bene che un tavolo è rettangolare e hanno già avuto modo di riconoscere un rettangolo, anche disposto in questo modo".

Le rubriche ***Risultati*** e ***Procedure, ostacoli ed errori rilevati*** mostrano invece una confusione tra rettangolo e parallelogramma.
Il problema era stato proposto alle classi della finale internazionale di Briga, nel 2008: le 12 classi "migliori" vincitrici delle finali regionali di categoria 4 dell'anno precedente. Quasi tutte avevano disegnato parallelogrammi non rettangoli, come mostra la figura che segue. Una sperimentazione a grande scala ha confermato questo ostacolo.

Disposizione dei "tavoli" rilevate negli elaborati degli allievi; quelle in rosso sono presenti solo in una minoranza di casi.



I: “Oh là là!! Le medie dei punteggi attribuiti non sono certamente alte. Non posso credere che gli allievi disegnino dei tavoli a forma di parallelogrammi non rettangoli! Verificherò con i miei allievi: per gruppi di due, per 25-30 minuti e poi faremo una messa in comune”.

Poi il nostro visitatore ritorna sulla scheda, rilegge procedure, ostacoli ed errori rilevati e si interessa anche alla rubrica successiva:

Indicazioni didattiche

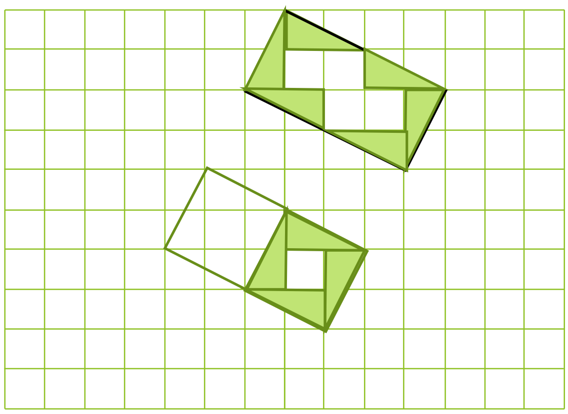
…

Il problema si presta a numerosi altri sviluppi:
- Constatare che in una rotazione di 90 gradi i lati del rettangolo seguono sempre le diagonali di rettangoli della quadrettatura di dimensioni (1 x 2) e che ciò consente di verificare che l’angolo è retto se si immagina una rotazione di un quarto di giro.
- Proporre agli allievi un rettangolo avente le stesse dimensioni di quelle del tavolo, ma con i vertici sulle intersezioni della quadrettatura invece che al centro dei quadratini e chiedere di calcolare la sua area in quadratini della quadrettatura: 10 (cosa che può farsi con conteggio dei 4 quadratini interi e di 6 ricostituiti). Poi far scomporre il rettangolo in due quadrati uguali giustapposti, la cui area è 5 in quadratini della quadrettatura. Infine, chiedere quanto misura il lato di questo quadrato (in lati dei quadratini).

Aiutandosi con la calcolatrice per arrivare progressivamente ad approssimazioni successive di 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,25; ... Questo sviluppo permette di considerare un “nuovo” numero che non si può determinare con misure tramite il righello ma al quale ci si può avvicinare con elevamento al quadrato e di cui la calcolatrice dà una buona approssimazione con il tasto √.

…

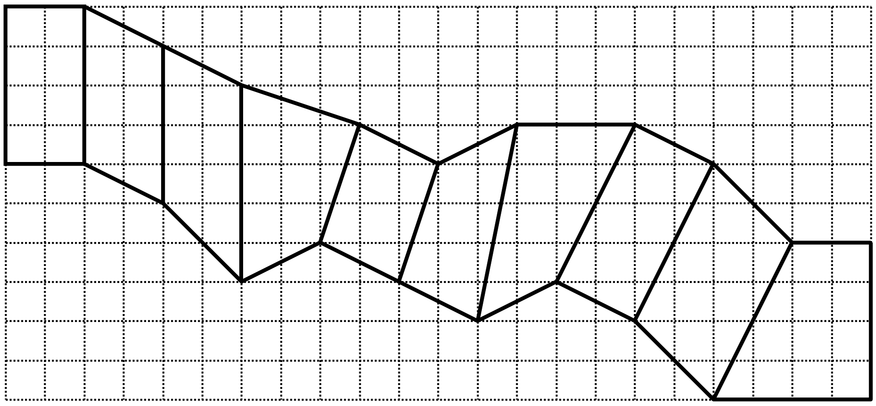
I. Buona idea: dedicherò una o due lezioni a costruzioni, rotazioni e simmetrie di rettangoli per rinforzare la consapevolezza che gli angoli sono retti, ecc.
E seguirò le proposte sull’area del tavolo. Spero che i miei allievi riusciranno a convincersi che tale area misura esattamente 10 quadretti della quadrettatura, anche se i lati del rettangolo non sono espressi in numeri interi, con l’apporto di figure come le seguenti:



3.2. Sul muro della scuola (I)

Nella scheda de *Il tavolo da spostare*, la rubrica ***Per andare più lontano*** propone altri tre problemi; *I dieci punti, Sul muro della* (I), *Sul muro della scuola* (II).
Soffermiamoci sul secondo e interessiamoci all’errore più frequente e alle indicazioni didattiche.

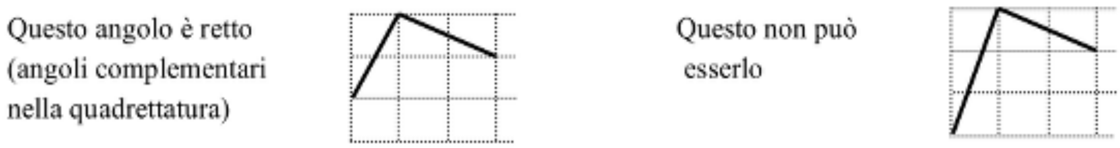
Sul muro della scuola (I) (cat. 4, 5)
Per decorare un muro della scuola, alcuni alunni hanno preparato un modello formato da 10 quadrilateri, su carta a quadretti, come nella figura che vedete qui sotto.
Luca dice: “Per colorarlo, potremmo usare pittura rossa per i rettangoli, pittura verde per i parallelogrammi non rettangoli e pittura gialla per tutti gli altri quadrilateri.”



Colorate il modello come ha proposto Luca.

Nella rubrica ***Procedure, ostacoli et errori rilevati*** si legge, fra l’altro:

L’errore più frequente, per circa la metà degli elaborati esaminati, è, in effetti, quello di considerare il quinto quadrilatero dalla sinistra come un rettangolo, senza rendersi conto che la sua “larghezza” è la diagonale di un rettangolo (1 × 2) e la sua “lunghezza” è la diagonale di un rettangolo (1 × 3)

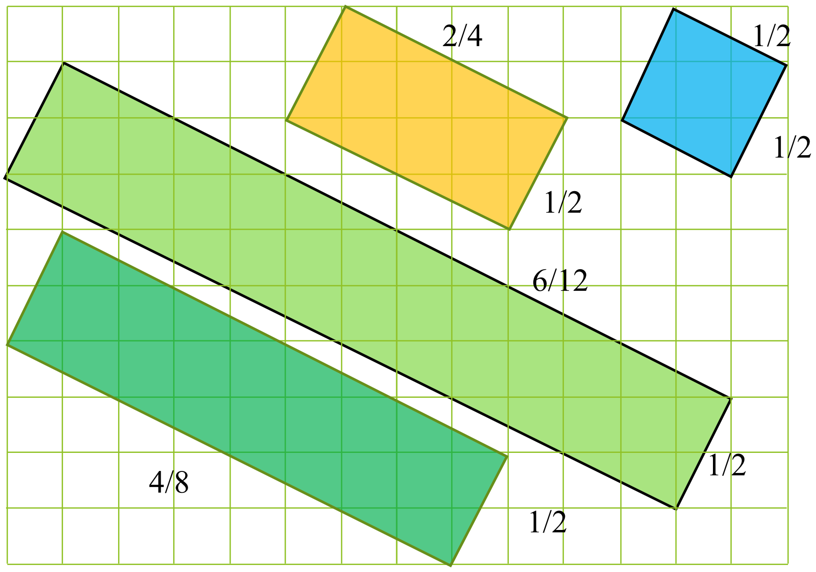


poi, nelle ***Indicazioni didattiche:***

…
L’ottavo quadrilatero è interessante da questo punto di vista in quanto i suoi lati sono non solo diagonali di rettangoli (1 x 2) della quadrettatura, ma anche di rettangoli (2 x 4), poi, prolungandoli, di rettangoli (3 x 6), poi di (4 x 8) … con un’apertura sull’uguaglianza dei rapporti, come approccio alla proporzionalità in una situazione geometrica.

che provocano le reazioni del nostro visitatore:

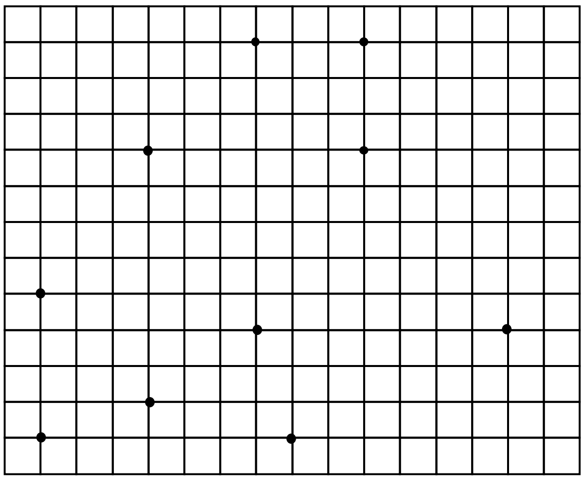
I: “Dopo il problema precedente i miei allievi di categoria 6 non dovrebbero più avere troppe difficoltà, come indicano i risultati, visto che in categoria 5 c’è già il 52% di risposte completamente corrette. Verificherò comunque il quinto quadrilatero del “muro della scuola”.
Preparerò una scheda per esplorare la figura che segue: calcolare l’area del quadrato blu il cui lato è la diagonale di un rettangolo di dimensioni 1 e 2, poi quella del rettangolo giallo avente la stessa larghezza del quadrato ma la cui lunghezza è la diagonale di un rettangolo di dimensioni 2 e 4, il doppio di quella della larghezza, …”:



I: "E potremo ricominciare a partire dalle diagonali di rettangoli differenti del tipo (1 × 2), (2 × 3), (1 × 4) allungati, disposti perpendicolarmente …
A proposito, questo mi ricorda vagamente le lezioni di geometria analitica al liceo, quando il professore ci parlava di vettori paralleli a una retta o di vettore "normale"… . Mi sembra di percepire delle analogie! Se avessi fatto quest'attività nella secondaria di I grado, forse avrei avuto meno difficoltà".

3.3 I dieci punti

<u>**I dieci punti**</u> (cat. 5, 6, 7)
Ci sono dieci punti segnati qui sotto su una griglia quadrettata.
Francesco ne ha trovato quattro che sono i vertici di un rettangolo.

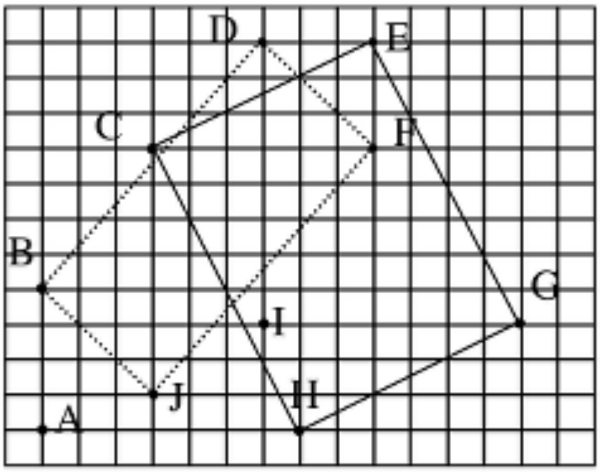


Individuate questi quattro punti, disegnate il rettangolo in rosso e spiegate perché pensate che sia un rettangolo.

Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.

Che cosa ne pensate?

Il nostro visitatore legge attentamente la rubrica ***Procedure, ostacoli ed errore rilevati*** e osserva che c'è un solo rettangolo CHGE



poi si sofferma sul seguito della scheda:

Procedure, ostacoli ed errore rilevati
Le procedure di ricerca delle coppie di segmenti paralleli e congruenti sono dapprima di tipo "visivo", poi analitiche, per esempio tramite un controllo con il ricorso a strumenti. Si trova così che non ci sono coppie di segmenti paralleli alle righe della griglia e che ci sono solo **4 coppie da prendere in considerazione: BD e JF, BJ e DF, CE e HC, CH e EG.**

Indicazioni didattiche
Ma si può anche andare più lontano, verso una giustificazione tramite le "componenti" orizzontale e verticale dei segmenti considerati come diagonali di rettangoli. Si tratta di una "iniziazione" naturale al concetto di vettore e delle sue componenti.

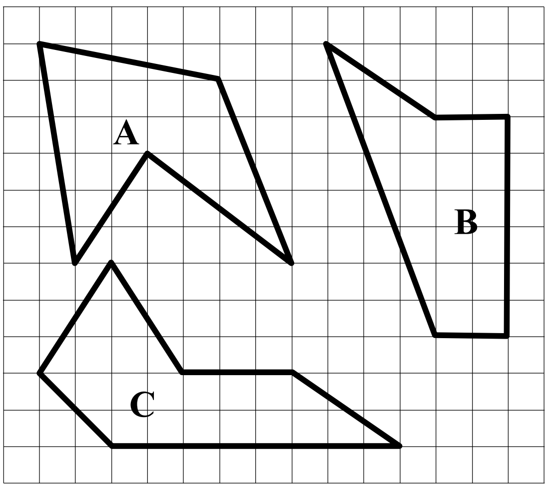
E inserisce ancora un problema nel suo futuro percorso:

I: "Secondo me questo problema andrà bene tra una o due settimane dopo "*Il muro della scuola (I)" e*, per BFJD, farò osservare che il confronto dei rapporti è efficace e: 3/3 ≠ 6/7".

3.4. Confronto di figure

Confronto di figure (cat. 6, 7, 8)

Patrizia e Brunella osservano questi tre poligoni e si chiedono se hanno tutti la stessa area.



Dite se le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono diverse.
Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta.

Risultati

…

Le medie ottenute possono sembrare deboli ma occorre tener conto che i punteggi attribuiti dipendono dall'insieme del compito: la ricerca delle superfici delle tre figure. Ciò significa, ad esempio, che il 39% (6 + 18 + 15) dei gruppi ha trovato due o tre delle aree, il 28% ne ha trovato una sola ed il 34% ha commesso troppi errori e non ha trovato alcuna area corretta.

I: “verificherò se la mia classe di categoria 6 se la caverà meglio”.

Procedure, ostacoli ed errore rilevati

L'analisi a posteriori approfondita di circa 350 elaborati di quattro sezioni ha permesso di evidenziare tre procedure principali:

…

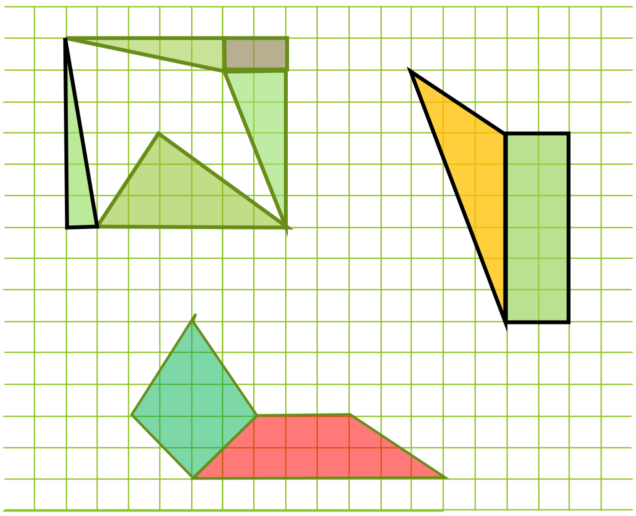
I: “È piuttosto lungo da leggere, ma, in effetti, ci sono delle osservazioni che ho già constatato con i miei allievi”.

Indicazioni didattiche

…

- la percezione della “grandezza” area e la sua distinzione dalla “grandezza” lunghezza, la necessità di scegliere un’unità d’area che sia la medesima per tutte le figure,
- l'organizzazione del conteggio e dei raggruppamenti delle parti di unità,
- la necessità di scomporre le figure complesse in figure elementari nel caso in cui il conteggio e i raggruppamenti siano troppo complessi,
- “l'additività” delle aree che può estendersi alla “sottrattività” quando si inquadri la figura in un rettangolo circoscritto,
- la padronanza delle formule dell’area del rettangolo, ma anche del triangolo, la percezione che un triangolo è un semi-parallelogramma che è da parte sua equivalente ad un rettangolo,
- la totale inadeguatezza dei tentativi di misurazione in cm,

I: “Tengo a mente *l’additività e la sottrattività, la* padronanza delle formule (che sono nel programma), l’inadeguatezza dei tentativi di misurazioni per la fase di istituzionalizzazione, dopo la messa in comune e la discussione. Qui c’è tutto il programma del livello corrispondente alle categorie 6 e 7 sul calcolo di aree.
Mi piacerebbe anche che i miei allievi potessero applicare le formule sui triangoli e perché no sul trapezio e sul romboide e poi fare una verifica con il conteggio uno a uno dei quadretti. So già che ci saranno dei problemi con il triangolo giallo: si può prendere come «base» il suo lato verticale di lunghezza 6 (lati di quadretti), ma non sarà facile determinare l’altezza corrispondente!!”.



I: “Poi, per finire, passeremo alle misure in cm per mostrare l’inefficacia delle procedure con misurazione!”.

3.5. A quale distanza?

A quale distanza ? (cat. 7, 8)

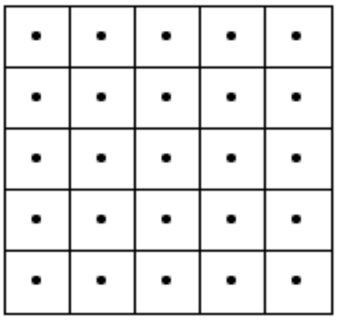
Un giardiniere ha piantato degli alberi a distanza regolare in un terreno quadrato come mostra il disegno.

Suo figlio, che ha una mente matematica, osserva che la distanza tra due alberi non è sempre la stessa. Egli pone questa domanda:

"Quante distanze differenti ci sono tra due alberi del tuo giardino?"

Rispondete anche voi a questa domanda.

Spiegate come avete trovato la soluzione.



I:" Forse questo problema è prematuro in prima secondaria I, ma potrei proporlo alla fine dell'anno per riprendere la problematica dell'inefficacia delle misure, come visto in precedenza" In effetti, secondo il ***Compito di risoluzione e saperi***, gli allievi possono confrontare le differenti lunghezze col compasso con una precisione sufficiente, salvo per due fra esse, molto vicine, per le quali si renderanno conto che bisogna utilizzare tutto ciò che è stato intravisto nei problemi precedenti, come spiega bene la rubrica seguente:

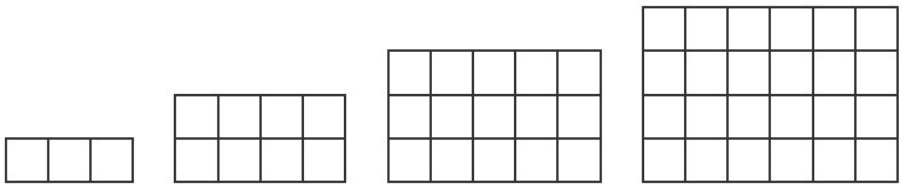
Indicazioni didattiche

Il solo confronto che richiede un'attenzione particolare è quello delle due diagonali di un rettangolo (1;4) e del quadrato (3;3). La differenza è visibile con l'uso del compasso o con la costruzione precisa di un ingrandimento della griglia quadrata. Il confronto può anche essere fatto per costruzione, su una quadrettatura di quadrati costruiti su ciascuna diagonale, poi con conteggio dei quadrati interi e di parti di quadrati raggruppati. Le aree di questi quadrati sono rispettivamente 17 e 18 (in quadrati della quadrettatura) e si può concludere, per deduzione, che i due segmenti sono differenti (anche senza il teorema di Pitagora, né calcoli di radici quadrate!).

3. 6. Griglie

Griglie (cat. 4, 5, 6)

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.



Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?

E una di esattamente 224?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

I: **"**Questo problema mi piace molto con una successione numerica da scoprire che è possibile verificare con conteggio dei quadrati del disegno. Ai miei allievi piacerà; a loro piace andare alla ricerca di un qualcosa che permetta loro di passare da un numero al successivo".
Mi è anche piaciuto molto lo studio citato in bibliografia: (http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/etude-op88-fr.pdf)".[4]
Questo problema è una variazione di Griglie (08.II.05) con modifiche minori. Le medie dei punteggi ottenute per le categorie corrispondenti sono molto simili.

L'estratto che segue fa parte della scheda di questa prima versione del problema.

[4] Questo studio è anche pubblicato nella rubrica "Approfondimenti" del n. 9 de La Gazzetta di Transalpino.

Indicazioni didattiche

Questo problema è interessante per rafforzare o costruire i due concetti seguenti:

- l'area del rettangolo come prodotto delle misure delle sue due dimensioni, con le sue rappresentazioni geometriche attraverso delle griglie,
- la metodologia delle sequenze o progressioni con le leggi del passaggio da una griglia alla seguente, sia aumentando ogni volta i due fattori di un'unità, sia aggiungendo le differenze successive (che sono esse stesse la sequenza dei numeri dispari successivi)

Rende ancora possibile combattere la "tentazione della proporzionalità", vale a dire l'applicazione meccanica e non ragionata della regola reciproca di "se raddoppio le dimensioni, anche l'area raddoppia".

Si veda anche la seconda versione, con modifiche minori, del problema Griglie (25.I.06). Le medie dei punteggi ottenuti per le categorie corrispondenti sono quasi le stesse.

I: "La tentazione della proporzionalità rischia veramente di essere forte per qualcuno dei miei allievi".

3.7. Il ritaglio di triangoli

Il ritaglio di triangoli (cat. 6, 7, 8)

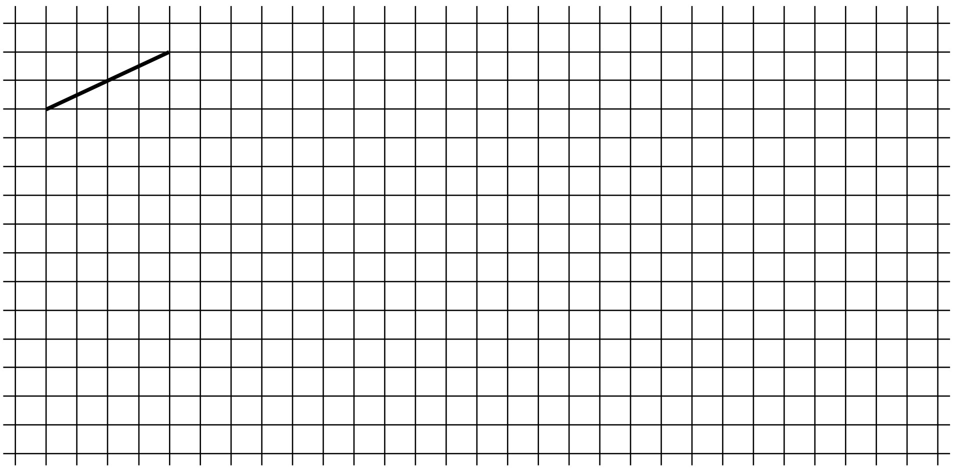
Cristina disegna alcuni triangoli su un foglio quadrettato e poi li ritaglia.

Tutti i suoi triangoli hanno:

- due lati della stessa lunghezza di quella del segmento disegnato sulla quadrettatura sottostante;
- tutti i vertici in punti di intersezione della quadrettatura.

Quanti triangoli differenti (cioè non esattamente sovrapponibili dopo averli ritagliati) può aver ritagliato Cristina?

Disegnateli tutti utilizzando la quadrettatura qui sotto.



I: "Vedo che nella rubrica ***Risultati*** la media di 0,8 in categoria 6 corrisponde al 55% dei gruppi che hanno trovato un solo triangolo o incomprensione e 23% con solo due triangoli!! Mi chiedo se i miei allievi riconosceranno il segmento dato (2 × 4) o (1 × 2) disegnato in tutte le posizioni possibili dopo l'attività con il problema *Il tavolo da* spostare. E sono d'accordo con l'osservazione che segue:"

Indicazioni didattiche

Un problema come "Il ritaglio di triangoli" permette di far venire alla luce ostacoli caratteristici a proposito di nozioni che sembrerebbero acquisite, come il triangolo isoscele, la sua posizione e la congruenza di segmenti. Si osserva chiaramente che l'immagine di triangolo isoscele che hanno gli allievi è quella di una figura con tre lati di cui uno è orizzontale e gli altri due, congruenti, sono obliqui. …

4. Il punto sulla situazione

4.1. Ricchezza e diversità

Abbiamo visto sette problemi: *Il tavolo da spostare, Sul muro della scuola (I), I dieci punti, Confronto di figure, A quale distanza? Griglie, Il ritaglio di triangoli.*

Questi sette problemi permettono di prendere in considerazione una gran parte di argomenti del programma delle classi corrispondenti a quelle della nostra categoria 6 (11-12 anni) e molti altri, dei livelli precedenti e di quelli successivi.

Si prendono in considerazione: il rettangolo, i suoi lati, il loro rapporto, le sue diagonali, i suoi angoli, il triangolo rettangolo; le lunghezze e le aree, le distanze, i numeri reali, le approssimazioni, le unità di lunghezza e di area, la geometria su quadrettatura, le formule di aree, le isometrie, …

Le sette schede corrispondenti sono ricche di constatazioni e osservazioni raccolte alla lettura degli elaborati degli allievi, poi di suggerimenti e di indicazioni didattiche.

La banca offre pertanto una sorgente di dati molto abbondanti. Non può però andare più in là. La palla è poi nel campo del visitatore.

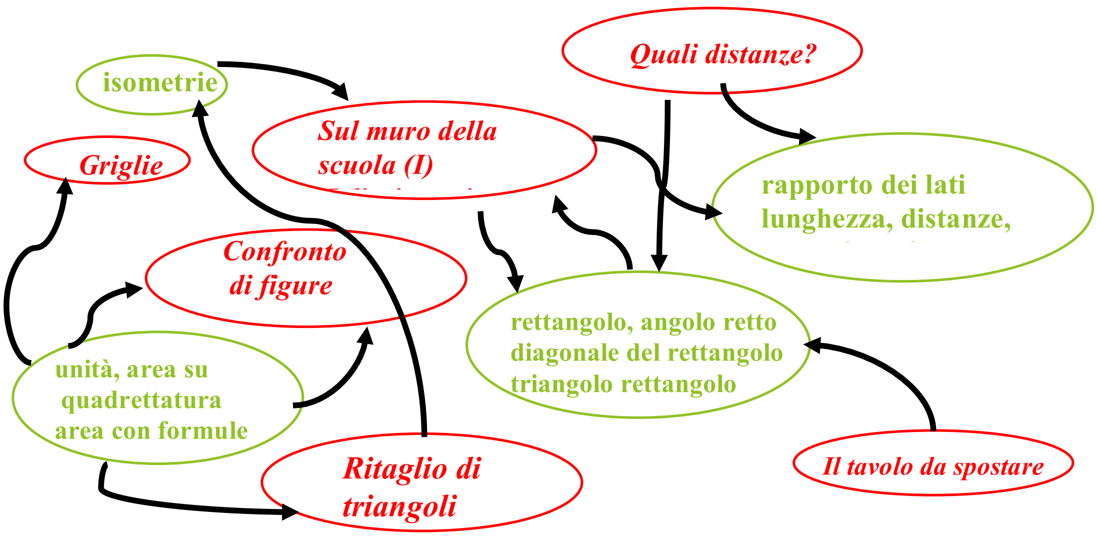
I: "Ci sono volute alcune ore per esaminare queste schede della banca: leggere gli enunciati, risolvere i sette problemi, leggere attentamente le varie rubriche, reperire le idee per la mia classe. Non figura però alcuna indicazione sull'ordine secondo il quale io possa organizzare questi problemi! Penso che dovrò essere io a organizzare il mio percorso!".

4.2. Percorso tra i problemi– percorso di apprendimento

Il tema di questa presentazione è "Elaborazione di percorsi di apprendimento a partire da problemi della banca".

La visita è cominciata con *Il tavolo da spostare*. Avremmo potuto scegliere un ordine diverso, scegliere altri problemi: un altro percorso tra problemi della banca.

Tornando al commento iniziale del nostro visitatore: *Rettangolo e area, mi interessa*, ci si rende conto che i sette problemi possono contribuire a far progredire i propri allievi nella costruzione dei concetti quali "rettangolo", "area" e tutti gli altri della lista precedente. Lo schema che segue dà qualche esempio di progressione tra problemi e concetti o nozioni.



4.3. Il compito dell'insegnante

Se da un lato la banca offre una sorgente di dati estremamente ricca e abbondante, dall'altro lato non pretende di sostituirsi all'insegnante che è interamente responsabile della conduzione della classe, secondo le sue concezioni personali dell'insegnamento e dell'apprendimento e secondo le caratteristiche della classe. Ecco un inventario succinto dei suoi compiti:

A) La preparazione:

- Ricerca di problemi e bozza di risoluzione
- Lettura della scheda
- Legame con i bisogni dei propri allievi e loro livello
- Riflessione su conoscenze, concetti, … programma

B) L'organizzazione di percorsi

- Da dove cominciare e dove finire
- La ripartizione delle attività nella durata globale del percorso
- Un problema e le sue utilizzazioni ogni settimana, il tutto in un trimestre?

C) Gli altri vincoli

- Differenziazione, valutazione
- Il programma, i libri di testo,
- Le relazioni tra allievi, i genitori, la direzione, …

5. Qualche riflessione a guisa di conclusione

5.1. La risoluzione di problemi

I testi ufficiali di accompagnamento ai programmi fanno tutti riferimento all'attività di risoluzione di problemi, ma senza precisarne le modalità né entrare nelle relative concezioni di apprendimento. "Risolvere problemi" è spesso una "formula" interpretata come soluzione-miracolo per l'insegnamento della matematica.

Alla lettura delle schede della banca ci si rende conto che i problemi proposti non posseggono in se stessi alcun potere magico. È nel risolverli che gli allievi si pongono delle domande, cercano di utilizzare saperi già incontrati o adattarli o ancora immaginarne altri. La risposta corretta riveste un interesse secondario, gli aspetti che sono invece al centro dell'attività matematica sono le procedure di ricerca, gli scambi tra allievi, i modi di superare gli ostacoli.

La risoluzione dei problemi proposti dal RMT è sottomessa a condizioni particolari: l'allievo si trova davanti ad una situazione nuova, responsabile della ricerca della soluzione, in collaborazione con i compagni, con la necessità di rispondere anche alla richiesta di descrivere la procedura di risoluzione.

Se poi il problema è utilizzato in classe, l'allievo parteciperà ancora a scambi e discussioni collettive per arrivare a fasi di sintesi, validazioni, esplicitazione di saperi e istituzionalizzazione.

L'insegnante che opti per questa utilizzazione didattica ha operato una scelta, difficile da gestire e diciamolo pure, ardita; infatti, è molto più semplice dare un problema come applicazione di un sapere "insegnato" in precedenza, senza preoccuparsi d'altro che della risposta, corretta o errata.

Possiamo ricordare a tale proposito che il contratto di entrata nella banca (si veda 2.1) è chiaro ed esplicito:

> Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?
> Questo lavoro di ricostruzione di saperi pregressi o di costruzione di nuovi saperi, è la sfida del problema, ma non scaturisce spontaneamente durante la risoluzione del problema. Bisogna che l'allievo prenda coscienza delle concezioni antagoniste del sapere in gioco: quella che non è adeguata o erronea e quella che permetterà di arrivare alla soluzione. Questo confronto può eventualmente essere abbozzato all'interno del gruppo di allievi, ma più sovente, si manifesterà solo all'atto del dibattito collettivo organizzato dall'insegnante dopo che gli allievi avranno dato le loro risposte.

5.2. Un nuovo sguardo sui "programmi"

Questa visita della banca ha avuto inizio con un riferimento al "rettangolo" e alle "aree" che troviamo in tutti i programmi di matematica. Ci siamo però subito resi conto che non è sufficiente proporre agli allievi i sette problemi presi in considerazione perché acquisiscano le "competenze" o "attese" richieste dai testi ufficiali. I risultati rilevati lo testimoniano bene. Per esempio: il termine "rettangolo" dei programmi è ben noto agli allievi ben prima degli 11 anni, ma è associato a una figura nella quale la perpendicolarità dei lati non è percepita coscientemente; è invece solo riconosciuto in posizione privilegiata; la formula dell'area del rettangolo può essere memorizzata o applicata efficacemente in maniera algoritmica solo in casi particolari; gli allievi sanno misurare lunghezze con il righello, ma non sanno interpretare le misure ottenute quando non sono numeri interi di cm o di mm; … . I nostri problemi permettono di scoprire ciò che c'è nella testa di coloro che cercano di risolverli: conoscenze in costruzione e non ancora completate, se mai lo saranno un giorno.

Ciascun visitatore (insegnante) della banca deve evidentemente tener conto delle nozioni che figurano nei programmi di matematica per scegliere i problemi che utilizzerà; ma poi deve dare la priorità allo sviluppo dinamico dei concetti approcciati in funzione dei bisogni e delle capacità dei propri allievi, indipendentemente dai testi ufficiali. Ad esempio, nella "geometria su quadrettatura" illustrata con alcuni dei problemi esaminati, se gli allievi scoprono che l'area di un quadrato, per scomposizione, corrisponde a 10 quadretti unità, non è vietato riflettere sulla natura della misura del lato di tale quadrato, anche se il teorema di Pitagora o lo studio delle radici quadrate non figurano nel programma di quella classe.

5.3. L’avvenire della banca di problemi del RMT

Un sforzo è già stato compiuto da tutti coloro i quali, in seno al RMT, da più di vent’anni, elaborano problemi, attribuisco i punteggi agli elaborati degli allievi, li analizzano a posteriori, prendono in considerazione i risultati per creare nuovi problemi che consentano in maniera migliore di cogliere i passaggi importanti nella costruzione delle conoscenze. Le 1200 schede attuali della banca lo testimoniano.

Terminiamo questa presentazione con un appello.

La nostra banca è un’opera collettiva, viva e in evoluzione. È il riflesso di coloro che contribuiscono alla sua elaborazione e la utilizzano: gli animatori delle nostre sezioni, tutti coloro i quali leggono gli elaborati degli allievi e partecipano all’attribuzione dei punteggi, gli autori e revisori dei problemi, i gruppi permanenti di lavoro, tutti coloro che si lanciano nelle analisi a posteriori, tutti coloro che utilizzano i nostri problemi in classe e propongono nuovi commenti o risultati.

A tutti chiediamo di partecipare a questa elaborazione perché c’è ancora molto da fare:

Bisogna continuare!!

- Completare i nostri sunti con concisione, precisione, armonizzazione.
- Descrivere le famiglie, o ridefinirle, o crearne altre più precise.
- Analizzare elaborati, elaborati, elaborati… per avvicinarci al compito di risoluzione dell’allievo, alle sue procedure, ai suoi ostacoli e difficoltà.
- Proporre suggerimenti per l’utilizzazione didattica, per connessioni con altri problemi.
- Elaborare varianti per esplorare tutto ciò che si osserva nelle analisi a posteriori.
- Sperimentare, proporre percorsi di apprendimento a partire dai nostri problemi[5].

[5] Tra il momento della stesura della presentazione e la sua pubblicazione su La Gazzetta di Transalpino, abbiamo ricevuto un bell’esempio di utilizzazione dei nostri problemi (si veda l’articolo di Brunella Brogi alle pagine 117-119 di questo n. 9).